Удмуртский государственный университет
Министерство цифрового развития УР
Институт математики, информационных технологий и физики
Уральский математический центр
Олимпиада по математике, 6 апреля 2023 года, 7 класс, **вариант 1.**

1. Вычислить
$$\frac{(21557 \cdot 21577 + 100)(21547 \cdot 21587 + 400)}{21567^4}.$$

Ответ: 1. Заметим, что $21557 \cdot 21577$ можно представить в виде $(21567 - 10)(21567 + 10)$, а $21547 \cdot 21587$ можно представить в виде $(21567 - 20)(21567 + 20)$. Поэтому

$$21557 \cdot 21577 + 100 = (21567 - 10)(21567 + 10) + 100 = 21567^2 - 100 + 100 = 21567^2,$$
$$21547 \cdot 21587 + 400 = (21567 - 20)(21567 + 20) + 400 = 21567^2 - 400 + 400 = 21567^2.$$

Отсюда получаем ответ.

2. Не выполняя построения графика функции $y = 4x - 9$ найти точку графика, у которой абсцисса равна ординате.

Ответ: $(x, y) = (3, 3)$. Если $y = x$, то получаем уравнение $4x - 9 = x$, откуда $x = 3$. Значит $y = 3$.

3. Решить уравнение $x^2 + y^2 + 6x + 4y + 13 = 0$.

Ответ: $(x, y) = (-3, -2)$. Представим левую часть в виде

$$x^2 + y^2 + 6x + 4y + 13 = x^2 + 6x + 9 + y^2 + 4y + 4 = (x + 3)^2 + (y + 2)^2.$$

Получаем уравнение
$$(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 0.$$

4. На дороге, соединяющей два аула, нет ровных участков. Автобус едет в гору всегда со скоростью 15км/час, а под гору со скоростью 30км/час. Найти расстояние между аулами, если путь туда и обратно без остановок занимает 4 часа.

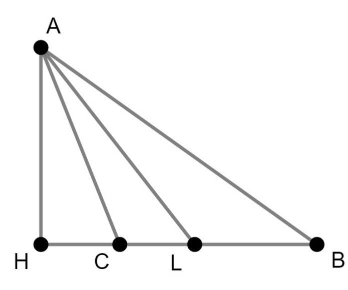
Ответ: 40км. Пусть x — путь в гору из 1 аула во второй и y — путь под гогу из первого аула во второй. Тогда время затраченное на переезд из первого аула равно $\frac{x}{15} + \frac{y}{30}$. Обратная дорога из второго аула в первый займет время, равное $\frac{x}{30} + \frac{y}{15}$. Так как общее время равно 4 часам, то получаем уравнение

$$\frac{x}{15} + \frac{y}{30} + \frac{x}{30} + \frac{y}{15} = 4, \text{ или } (x + y)\Big(\frac{1}{15} + \frac{1}{30}\Big) = 4.$$

Отсюда $x + y = 40$.

5. В треугольнике ABC $\angle A : \angle B = 2 : 5$, $\angle B : \angle C = 5 : 11$. Найти угол, между высотой и биссектрисой, проведенными из вершины меньшего угла.

Ответ: 30^0.



$\angle A : \angle B : \angle C = 2 : 5 : 11$. Отсюда углы треугольника равны $\angle A = 20^0$, $\angle B = 50^0$, $\angle C = 110^0$. Пусть AH – высота, AL – биссектриса. Тогда $\angle BAH = 40^0$, а $\angle LAH = 30^0$.

6. В комнате 12 человек, некоторые честные, а некоторые лжецы. Первый сказал «Среди нас нет честных людей». Второй сказал «Среди нас не более 1 честного», третий сказал «Среди нас не более двух честных» и так далее. 12-ый сказал «Среди нас не более 11 честных». Сколько честных людей могло быть в комнате?

Ответ: 6. Если бы честных было меньше 6, например, 5 то все, кто сказал что честных не меньше 5, то есть с 6 по 12 (их уже 7 человек), сказали бы правду. Противоречие. Значит, честных не меньше 6. Если честных больше 6, например, 7, то все кто сказал, что их не больше 6 (таких также 7), сказали бы неправду.

7. Можно ли в каждую клетку таблицы 4×4 расставить числа 1, 2, 3 так, чтобы среди сумм в строках и в столбцах встретились 8 последовательных натуральных чисел?

Ответ: Можно.

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Удмуртский государственный университет
Министерство цифрового развития УР
Институт математики, информационных технологий и физики
Уральский математический центр
Олимпиада по математике, 6 апреля 2023 года, 7 класс, **вариант 2.**

1.Вычислить

$$\frac{(32002 \cdot 32022 + 100)(31992 \cdot 32032 + 400)}{32012^4}.$$

2. Не выполняя построения графика функции $y = 2x - 7$ найти точку графика, у которой абсцисса равна ординате.

3. Решить уравнение $4x^2 + y^2 + 12x + 4y + 13 = 0$.

4. На дороге, соединяющей два аула, нет ровных участков. Автобус едет в гору всегда со скоростью 12км/час, а под гору со скоростью 24км/час. Найти расстояние между аулами, если путь туда и обратно без остановок занимает 3 часа.

5. В треугольнике ABC $\angle A : \angle B = 3 : 5$, $\angle B : \angle C = 5 : 10$. Найти угол, между высотой и биссектрисой, проведенными из вершины меньшего угла.

6. В комнате 14 человек, некоторые честные, а некоторые лжецы. Первый сказал «Среди нас нет честных людей». Второй сказал «Среди нас не более 1 честного», третий сказал «Среди нас не более двух честных» и так далее. 14-ый сказал «Среди нас не более 13 честных». Сколько честных людей могло быть в комнате?

7. Можно ли в каждую клетку таблицы 4×4 расставить числа 2, 3, 4 так, чтобы среди сумм в строках и в столбцах встретились 8 последовательных натуральных чисел?

Удмуртский государственный университет
Министерство цифрового развития УР
Институт математики, информационных технологий и физики
Уральский математический центр
Олимпиада по математике, 6 апреля 2023 года, 8 класс, **Вариант 1**

1. Даны два положительных числа. Одно из них увеличили на 1%, второе — на 4%. Могла ли их сумма увеличиться на 3%?

Ответ: да. Например, числа 100 и 200. Их сумма 300. После увеличения будут числа 101 и 208, сумма которых 309. Пусть x — первое число, y — второе. Тогда после увеличения первое станет равным $1,01x$, второе — $1,04y$. Получаем уравнение

$$1,01x + 1,04y = 1,03(x+y),$$

откуда следует, что $y = 2x$. Взяв два числа, второе из которых в два раза больше первого, получим требуемое.

2. Построить график функции $y = \frac{|x|}{x} + \frac{(x-1)}{|x-1|}$.

Ответ: Раскрывая модуль, получим

$$y = \begin{cases} -2, \text{ если } \ x < 0, \\ 0, \text{ если } \ 0 < x < 1, \\ 2, \text{ если } \ x > 1. \end{cases}$$

График будет иметь вид

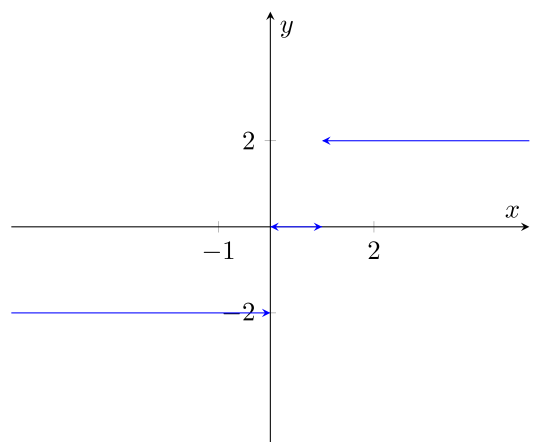


Рис. 1

3. Найти три последовательных натуральных числа, произведение которых равно 4080.

Ответ: 15, 16, 17. Отметим, что 4080 делится на 17.

4. Вычислить $\sqrt{2021 \cdot 2023 \cdot 2025 \cdot 2027 + 16}$.

Ответ: $2024^2 - 5$. Имеем

$$2019 \cdot 2021 \cdot 2023 \cdot 2025 + 16 = (2024-1)(2024+1)(2024-3)(2024+3) + 16 =$$
$$= (2024^2 - 1)(2024^2 - 3^2) + 16 = 2024^4 + 10 \cdot 2024^2 + 25 = (2024^2 - 5)^2.$$

5. Известно, что для некоторых чисел x, y числа $2x + y$ и $5x + 3y$ положительные. Может ли число $16x + 9y$ быть отрицательным?

Ответ: нет. Справедливо равенство

$$16x + 9y = 3(2x + y) + 2(5x + 3y).$$

Справа стоят положительыне числа.

6. В треугольнике ABC, угол B равен 78^0. Биссектрисы углов A и C пересекаются в точке D. Найти угол ADC.

Ответ: 129^0**.** Сумма углов A и C равна 102^0. Поэтому сумма углов DAC и DCA равна 51^0. Значит угол $ADC = 180^0 - 51^0 = 129^0$.

7. Можно ли в каждую клетку таблицы 7×7 расставить числа 1, 2, 3 так, чтобы среди сумм в строках и столбцах встретились 14 последовательных чисел?

Ответ: нет. Сумма 14 последовательных чисел нечетна, а сумма сумм строк и стобцов равна удвоенной сумме чисел в таблице и поэтому является четной.

Удмуртский государственный университет
Министерство цифрового развития УР
Институт математики, информационных технологий и физики
Уральский математический центр

Олимпиада по математике, 6 апреля 2023 года, 8 класс, **Вариант 2**

1. Даны два положительных числа. Одно из них увеличили на 2%, второе — на 7%. Могла ли их сумма увеличиться на 6%?

2. Построить график функции $y = \frac{|x|}{x} + \frac{(x-2)}{|x-2|}$.

3. Найти три последовательных натуральных числа, произведение которых равно 7980.

4. Вычислить $\sqrt{2015 \cdot 2017 \cdot 2019 \cdot 2021 + 16}$.

5. Известно, что для некоторых чисел x, y числа $x + y$ и $4x + y$ положительные. Может ли число $8x + 5y$ быть отрицательным?

6. В треугольнике ABC, угол B равен 84^0. Биссектрисы углов A и C пересекаются в точке D. Найти угол ADC.

7. Можно ли в каждую клетку таблицы 5×5 расставить числа 1, 2, 3 так, чтобы среди сумм в строках и столбцах встретились 10 последовательных чисел?

Удмуртский государственный университет
Министерство цифрового развития УР
Институт математики, информационных технологий и физики
Уральский математический центр
Олимпиада по математике, 6 апреля 2024 года, 9 класс, **вариант 1.**

1. Вычислить $\frac{(a^{-4})^3 \cdot (a^2)^5}{a^2}$ при $a = \sqrt{5}$.
Ответ: $\frac{1}{25}$.

2. Решить неравенство $\frac{x^2+7x+10}{9x-x^2} \geqslant 0$
Ответ: $[-5; -2] \cup (0; 9)$. Применить метод интервалов.

3. Построить график функции $y = \frac{x+1}{|x+1|} + \frac{x-2}{|x-2|}$
Освободимся от модуля. Пусть $x+1<0$. Тогда $x<-1$ и поэтому $x-2<0$. Получаем $y=-2$.
Пусть $x+1>0, x-2<0$. Тогда $x \in (-1; 2)$ и поэтому $y=0$.
Если $x-2>0$, то есть $x \in (2; +\infty)$, то $y=2$. Получаем график

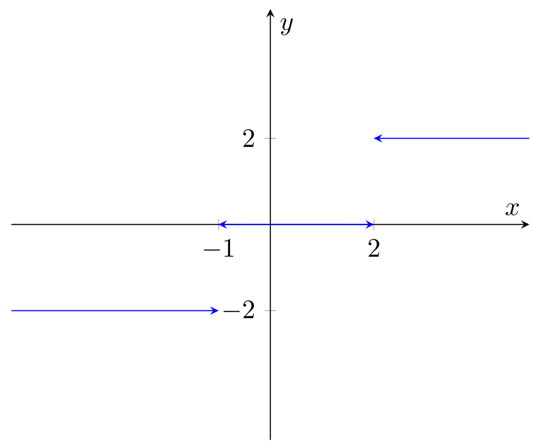


Рис. 1

4. Машина должна была проехать 420 км за определенный срок, но была задержана с выездом на 1 час, поэтому ей пришлось увеличить скорость на 10 км/ч. С какой скоростью двигалась машина?

Ответ: 70км/час. Пусть x — скорость движения машины, тогда скорость движения по расписанию $x-10$. Реальное время движения $\frac{420}{x}$, время по расписанию $\frac{420}{x-10}$. По условию эти времена отличаются на 1. Получаем уравнение

$$\frac{420}{x-10} - \frac{420}{x} = 1 \quad \text{или} \quad \frac{4200 - x^2 + 10x}{x(x-10)} = 0.$$

Корнями уравнения будут $x=70$ и $x=-60$. Так как $x>0$, то $x=70$км/час.

Замечание. Если в ответе указана скорость по расписанию, а не скорость движения — **не более 5 баллов.**

5. Произведение первого и пятого членов возрастающей арифметической прогрессии равно 17, а произведение второго и четвертого членов этой же прогрессии равно 32. Найти разность прогрессии.

Ответ: $\sqrt{5}$. Пусть a_1 — первый член последовательности, d — разность последовательности. Тогда

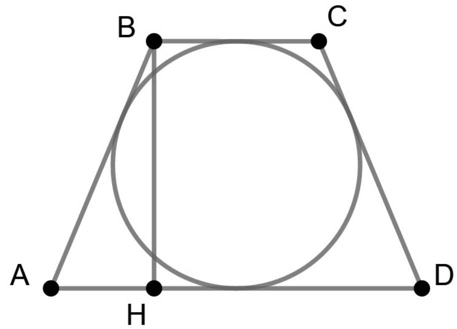
$$a_2 = a_1 + d,\ a_4 = a_1 + 3d,\ a_5 = a_1 + 4d.$$

По условию

$$\begin{cases} a_1(a_1+4d) = 17, \\ (a_1+d)(a_1+3d) = 32 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a_1^2 + 4a_1 d = 17, \\ a_1^2 + 4a_1 d + 3d^2 = 32. \end{cases}$$

Вычитая из второго равенства первое, получаем $3d^2 = 15$. Отсюда $d = \sqrt{5}, d = -\sqrt{5}$. Так как прогрессия возрастающая, то $d = \sqrt{5}$.

6. В равнобедренную трапецию с основаниями 12 и 27 вписан круг. Найти его радиус.
Ответ: 9.



По свойству вписанной окружности $AB + CD = AC + AD$. Отсюда $2AB = 39$, $AB = \frac{39}{2}$. Пусть BH — высота. Тогда $AH = \frac{AD-BC}{2} = \frac{15}{2}$. По теореме Пифагора

$$BH^2 = AB^2 - AH^2.$$

Поэтому

$$BH^2 = \left(\frac{39}{2}\right)^2 - \left(\frac{15}{2}\right)^2 = \left(\frac{39}{2} + \frac{15}{2}\right) \cdot \left(\frac{39}{2} - \frac{15}{2}\right) = 27 \cdot 12 = 324.$$

Значит $BH = 18$, а тогда радиус равен 9.

7. Существует ли прямоугольный треугольник, стороны которого удовлетворяяют соотношению

$$a^2 + 2b^2 = 7c^2?$$

Ответ: существует. Например, пусть $a = \sqrt{6}, b = 2, c = \sqrt{2}$. Тогда a — гипотенуза, b, c — катеты, $a^2 = b^2 + c^2$ и выполнено условие задачи.

8. Свежие фрукты содержат 78% воды, сухие — 12%. Сколько сушеных фруктов получится из 35 кг свежих?

Ответ: 8,75кг. Свежие фрукты содержат 22% сухого вещества. Поэтому в 35кг свежих фруктов $\frac{35 \cdot 22}{100} = \frac{77}{10}$кг сухого вещества.

Получили, что сухие фрукты содержат $\frac{77}{10}$ кг сухого вещества, которое составляет 88%. Следовательно, всех сухих фруктов будет

$$\frac{7,7 \cdot 100}{88} = 8,75$$

9. Из произведения всех натуральных чисел от 1 до 2025 вычеркнули все числа, оканчивающиеся на 0, 5 и на 3. Какой цифрой будет оканчиваться произведение оставшихся чисел?

Ответ: 2. Заметим сначала, что на последнюю цифру произведения влияют только последние цифры сомножителей. Поэтому наше произведение имеет ту же последнюю цифру, что и произведение

$$1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \times 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \times \ldots 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 \times 1 \cdot 2 \cdot 4,$$

Рассмотрим произведение $1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9$. Оно оканчивается на 2. То есть наше произведение оканчивается на ту же цифру, что и произведение

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \ldots 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \ldots 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2.$$

В наше произведение $2 \cdot 2 \cdot 2 \ldots 2$ входит цифра 2 входит 205 раз. Поэтому нам нужно найти последнюю цифру числа 2^{205} Найдем последнюю цифру числа 2^k. Будем иметь

k	последняя цифра
1	2
2	4
3	8
4	6
5	2

Получили, что последняя цифра периодически повторяется в зависимости от остатка при делении k на 4. Если k при делении на 4 дает остаток 1, то последняя цифра 2. Значит наше произведение оканчивается на 2.

10. При каких a все значения x, принадлежащие отрезку $[1; 3]$, являются решением неравенства

$$x^2 - x + (a-2)(3-a) \leqslant 0?$$

Ответ: $a \in (-\infty; 0] \cup [5; +\infty)$.

Для того, чтобы $[1;3]$ являлся решением неравенства необходимо и достаточно, чтобы 1 и 3 удовлетворяли неравенству. Получаем систему

$$\begin{cases} 1 - 1 + (a-2)(3-a) \leqslant 0, \\ 9 - 3 + (a-2)(3-a) \leqslant 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} (a-2)(3-a) \leqslant 0, \\ -a^2 + 5a \leqslant 0. \end{cases}$$

Решением неравенства $(a-2)(3-a) \leqslant 0$ будет $(-\infty; 2] \cup [3; +\infty)$, решением неравенства $-a^2 + 5a \leqslant 0$ будет $(-\infty; 0] \cup [5; +\infty)$. Поэтому решением системы будет $(-\infty; 0] \cup [5; +\infty)$.

11. Найти 19 последовательных натуральных чисел, сумма которых делится на 2024.

Ответ: например, $2015, 2016, \ldots, 2033$.

Пусть n — первое число набора. Тогда сумма будет

$$n + (n+1) + (n+2) + \ldots + (n+18) = 19n + (1 + 2 + \ldots + 18) = 19(n+9).$$

По условию число $19(n+9)$ должно делиться на 2024. Так как 19 и 2024 взаимно просты, то $n+9$ должно делиться на 2024. Поэтому можно выбрать n так, чтобы $n + 9 = 2024$, откуда $n = 2015$. Получаем набор $2015, 2016, \ldots, 2033$.

Удмуртский государственный университет
Министерство цифрового развития УР
Институт математики, информационных технологий и физики
Уральский математический центр
Олимпиада по математике, 6 апреля 2024 года, 9 класс, **вариант 2.**

1. Вычислить $\frac{(a^{-3})^3 \cdot (a^4)^2}{a^3}$ при $a = \sqrt{3}$.

2. Решить неравенство $\frac{x^2+12x+20}{12x-x^2} \geqslant 0$

3. Построить график функции $y = \frac{x+2}{|x+2|} + \frac{x-3}{|x-3|}$

4. Пешеход должен был пройти 12 км за определенный срок, но был задержан с выходом на 1 час, поэтому ему пришлось увеличить скорость на 1 км/ч. С какой скоростью шел пешеход?

5. Произведение первого и пятого членов возрастающей арифметической прогрессии равно 21, а произведение второго и четвертого членов этой же прогрессии равно 48. Найти разность прогрессии.

6. В равнобедренную трапецию с основаниями 7 и 28 вписан круг. Найти его радиус.

7. Существует ли прямоугольный треугольник, стороны которого удовлетворяяют соотношению

$$a^2 + 5b^2 = 9c^2?$$

8. Свежие фрукты содержат 79% воды, сухие — 16%. Сколько сушеных фруктов получится из 25 кг свежих?

9. Из произведения всех натуральных чисел от 1 до 2023 вычеркнули все числа, оканчивающиеся на 0, 5 и на 2. Какой цифрой будет оканчиваться произведение оставшихся чисел?

10. При каких a все значения x, принадлежащие отрезку $[1;2]$, являются решением неравенства $x^2 - 6x + (a+2)(4-a) \leqslant 0$?

11. Найти 19 последовательных натуральных чисел, сумма которых делится на 2023.

Удмуртский государственный университет
Министерство цифрового развития УР
Институт математики, информационных технологий и физики
Уральский математический центр
Олимпиада по математике, 6 апреля 2024 года, 10 класс, **вариант 1.**

1. Вычислить $6^{-1,25} \cdot 4^{-\frac{3}{8}} \cdot 9^{\frac{5}{8}}$.
Ответ: $\frac{1}{4}$.

2. Решить систему $\begin{cases} 3x - 4y = 5, \\ 5x + 6y = 7 \end{cases}$

Ответ: $\left(\frac{29}{19}, -\frac{2}{19}\right)$. Умножим первое уравнение на 3, второе на 2. Получим систему $\begin{cases} 9x - 12y = 15, \\ 10x + 12y = 14. \end{cases}$ Сложив эти уравнения, получим $19x = 29$, $x = \frac{29}{19}$. Аналогично находится y.

3. Решить неравенство $\frac{3x+1}{x+1} \geqslant \frac{x+1}{3x+1}$.
Ответ: $(-\infty; -1) \cup [-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}) \cup [0; +\infty)$. Приведем неравенство к виду

$$\frac{3x+1}{x+1} - \frac{x+1}{3x+1} \geqslant 0, \text{ или } \frac{8x^2+4x}{(x+1)(3x+1)} \geqslant 0.$$

Решая последнее неравенство методом интервалов, получаем ответ

4. Теплоход затратил на путь вниз по течению от пункта **А** до пункта **В** 6 часов, а на обратный путь — 8 часов. Найти собственную скорость теплохода, если расстояние между **А** и **В** 240 км.

Ответ: 35 км/час. Пусть x — собственная скорость теплохода, y — скорость течения реки. Тогда получаем систему

$$\begin{cases} 6(x+y) = 240, \\ 8(x-y) = 240. \end{cases} \qquad \text{откуда} \qquad \begin{cases} x+y = 40, \\ x-y = 30 \end{cases} \quad .$$

Сложив два последних уравнения, получим $2x = 70$, $x = 35$.

5. Найти наименьший положительнй корень уравнения $\sin^2 2x + \cos^2 3x = 1$
Ответ: $\frac{\pi}{5}$. Воспользуемся формулами

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}, \quad \cos^2 \beta = \frac{1 + \cos 2\beta}{2}.$$

Получим уравнение

$$\frac{1 - \cos 4x}{2} + \frac{1 + \cos 6x}{2} = 1, \text{ или } \cos 6x - \cos 4x = 0.$$

Последнее уравнение представим в виде

$$-2 \sin \frac{6x - 4x}{2} \sin \frac{6x + 4x}{2} = 0 \text{ или } \sin x \cdot \sin 5x = 0.$$

Отсюда $\sin x = 0$ или $\sin 5x = 0$.

a) $\sin x = 0$. Тогда $x = \pi k, k \in Z$. Наименьший положительный корень получается при $k = 1$ и он равен π.

b) $\sin 5x = 0$. Тогда $5x = \pi n, n \in Z$. Поэтому $x = \frac{n\pi}{5}, n \in Z$. Наименьший положительный корень получается при $n = 1$ и он равен $\frac{\pi}{5}$.

Так как $\pi > \frac{\pi}{5}$, то наименьшим положительным корнем уравнения будет $\frac{\pi}{5}$.

Замечание. Если правильно найдены все решения уравнения (нет отбора нужного корня) — не более трех баллов.

6. На фирме **А** сотрудники с высшим образованием составляют 30%, на фирме **В** этот показатель равен 80%. После слияния фирм **А** и **В** образовалась фирма **С**, на которой тот же показатель стал равен 50%. Найти отношение количества сотрудников фирмы **А** к количеству сотрудников фирмы **В** до слияния.

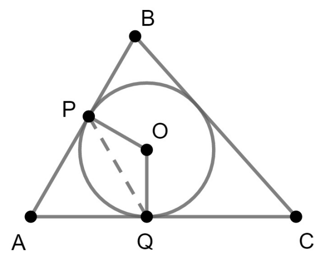
Ответ: $3:2$. Пусть в фирме **А** работало x сотрудников, в фирме **В** — y. Тогда в фирме **А** было $0,3x$ сотрудников с высшим образованием, а в фирме **В** было $0,8y$. Фирма **С** состоит из $x + y$ сотрудников, среди которых $0,5(x + y)$ с высшим образованием. Отсюда

$$0,3x + 0,8y = 0,5(x + y) \text{ или } 0,2x = 0,3y.$$

Значит $2x = 3y$. Поэтому $\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$.

7. В треугольник ABC $\angle A = 60^0$ вписана окружность радиуса $3\sqrt{3}$, которая касается стороны AB в точке P, а стороны AC в точке Q. Найти длину отрезка PQ.

Ответ: 9.



По свойству касательных $\angle APO = \angle AQO = 90^0$ O — центр окружности. Тогда $\angle POQ = 120^0$. По теореме косинусов имеем

$$PQ^2 = PO^2 + OQ^2 - 2PO \cdot OQ \cdot \cos\angle POQ.$$

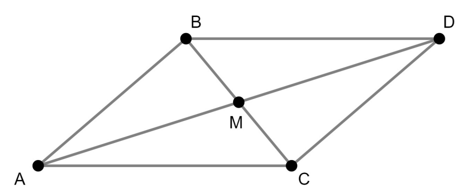
Отсюда

$$PQ^2 = \left(3\sqrt{3}\right)^2 + \left(3\sqrt{3}\right)^2 - 2 \cdot 3\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 81.$$

Следовательно, $PQ = 9$.

8. Две стороны треугольника 9 и 7, медиана к третьей стороне 6. Найти площадь треугольника.

Ответ: $14\sqrt{5}$.



В треугольнике ABC $AB = 7$, $AC = 9$, $AM = 6$, AM — медиана. Достроим треугольник ABC до параллелограмма $ABDC$. Тогда $AD = 12$, $DC = 7$. Отметим, что площади треугольников ABC и ADC равны, так как у них основание AC общее, а высоты из вершин B и D равны. Площадь треугольника ADC найдем по формуле Герона

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \text{ где } \ p = \frac{a+b+c}{2}, \quad a, b, c - \text{длины сторон.}$$

Имеем

$$p = \frac{12+9+7}{2} = 14, \ S = \sqrt{14 \cdot (14-12) \cdot (14-9) \cdot (14-7)} = 14\sqrt{5}.$$

9. Вычислить $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha$, если $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{4}{5}$.

Ответ: $\frac{2007}{2500}$.

Преобразуем $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha$. Получим

$$\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = \left(\sin^2\alpha\right)^3 + \left(\cos^2\alpha\right)^3 = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)(\sin^4\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha) =$$
$$= \sin^4\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha.$$

Далее имеем

$$\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha.$$

Поэтому

$$\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = 1 - 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1 - 3\left(\sin\alpha\cos\alpha\right)^2.$$

Возводя равенство $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{4}{5}$ в квадрат, получим

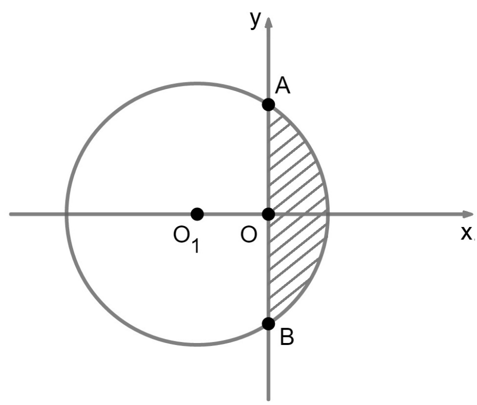
$$\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = \frac{16}{25}$$

Отсюда $\sin\alpha\cos\alpha = -\frac{9}{50}$. Поэтому

$$\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = 1 - 3\Big(-\frac{9}{50}\Big)^2 = 1 - \frac{243}{2500} = \frac{2007}{2500}.$$

10. Найти площадь фигуры, задаваемой на плоскости решением системы $\begin{cases} x^2+y^2+2x-3 \leqslant 0, \\ x \geqslant 0 \end{cases}$

Ответ: $\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$.



Неравенство $x^2+y^2+2x-3 \leqslant 0$ эквивалентно неравенству

$$y^2 + (x+1)^2 \leqslant 4,$$

которое задает круг с центром в точке $(-1;0)$ и радиусом 2. Фигура, удовлетворяющая условию задачи — это часть круга, расположенного в правой полуплоскости. Координаты точки $A = (0;\sqrt{3})$, точки $B(0;-\sqrt{3})$. Искомая площадь равна площади сектора AO_1B из которой вычли площадь треугольника AO_1B. Так $\sin\angle AO_1O = \frac{\sqrt{3}}{2}$, то $\angle AO_1O = 60^0$ и поэтому $\angle AO_1B = 120^0$. Следовательно площадь сектора AO_1B равна $\frac{1}{3}$ площади всего круга и поэтому равна $\frac{4\pi}{3}$.

Площадь треугольника AO_1B равна

$$\frac{1}{2}AB \cdot O_1O = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 1 = \sqrt{3}$$

Поэтому площадь требуемой фигуры равна $\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$.

11. При каких a уравнение $\frac{40\cdot|x+4|}{x+4} = ax$ не имеет решений?
Ответ: $a \in [-10;0]$.
Так как $x = 0$ не является корнем уравнения, то уравнение представимо в виде

$$a = \frac{40|x+4|}{x(x+4)}.$$

Нам нужно найти всех значения параметра a, при каждом из которых прямая $y = a$ не пересекается с графиком функции $f(x) = \frac{40|x+4|}{x(x+4)}$. Функция f представима в виде

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{40}{x}, & \text{если} \;\; x < -4, \\ \;\;\frac{40}{x}, & \text{если} \;\; x > -4. \end{cases}$$

Получаем график, из которого следует, что уравнение не имеет решение при $a \in [-10;0]$.

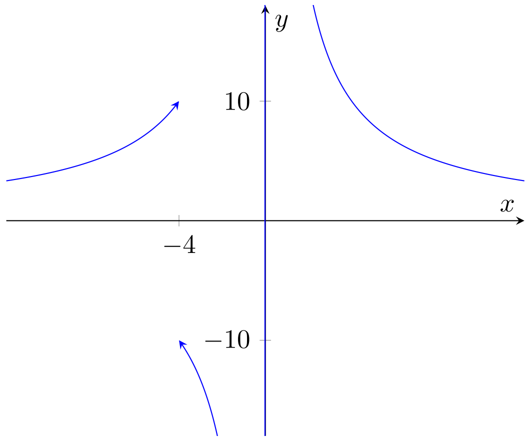


Рис. 1

12. Дана последовательность $\{x_n\}$ такая, что $x_1 = 1$, $x_2 = 5$ и для всех $n \geqslant 3$ $x_n = |x_{n-1} - x_{n-2}|$. Вычислить x_{2025}.

Ответ: 0. Вычислим несколько членов последовательности. Получим

$$x_3 = 4, x_4 = 1, x_5 = 3, x_6 = 2, x_7 = 1, x_8 = 1, x_9 = 0, x_{10} = 1, x_{11} = 1, x_{12} = 0, x_{13} = 1, x_{14} = 1, x_{15} = 0, \ldots$$

Видно, что при $n \geqslant 3$ имеет место $x_{3n} = 0$, $x_{3n+1} = x_{3n+2} = 1$. Значит $x_{2025} = 0$.

Удмуртский государственный университет
Министерство цифрового развития УР
Институт математики, информационных технологий и физики
Уральский математический центр
Олимпиада по математике, 6 апреля 2024 года, 10 класс, **вариант 2.**

1. Вычислить $10^{-1,25} \cdot 4^{-\frac{3}{8}} \cdot 25^{\frac{5}{8}}$.

2. Решить систему $\begin{cases} 3x - 4y = 5, \\ 5x - 6y = 8 \end{cases}$

3. Решить неравенство $\frac{3x-6}{x+4} \geqslant \frac{x-3}{2x+2}$.

4. Теплоход затратил на путь вниз по течению от пункта **A** до пункта **B** 6 часов, а на обратный путь — 9 часов. Найти собственную скорость теплохода, если расстояние между **A** и **B** 180 км.

5. Найти наименьший положительнй корень уравнения $\sin^2 x + \cos^2 3x = 1$

6. На фирме **A** сотрудники с высшим образованием составляют 30%, на фирме **B** этот показатель равен 60%. После слияния фирм **A** и **B** образовалась фирма **C**, на которой тот же показатель стал равен 50%. Найти отношение количества сотрудников фирмы **A** к количеству сотрудников фирмы **B** до слияния.

7. В треугольник ABC $\angle A = 45^0$ вписана окружность радиуса $3\sqrt{2}$, которая касается стороны AB в точке P, а стороны AC в точке Q. Найти длину отрезка PQ.

8. Две стороны треугольника 10 и 6, медиана к третьей стороне 7. Найти площадь треугольника.

9. Вычислить $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha$, если $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{3}{5}$.

10. Найти площадь фигуры, задаваемой на плоскости решением системы $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2y - 3 \leqslant 0, \\ y \geqslant 0 \end{cases}$

11. При каких a уравнение $\frac{24 \cdot |x-3|}{x-3} = ax$ не имеет решений?

12. Дана последовательность $\{x_n\}$ такая, что $x_1 = 2$, $x_2 = 5$ и для всех $n \geqslant 3$ $x_n = |x_{n-1} - x_{n-2}|$. Вычислить x_{2024}.

Удмуртский государственный университет
Министерство цифрового развития УР
Институт математики, информационных технологий и физики
Уральский математический центр
Олимпиада по математике, 6 апреля 2024 года, 10 класс, **вариант 3.**

1. Вычислить $12^{-1{,}25}\cdot 9^{-\frac{3}{8}}\cdot 16^{\frac{5}{8}}$.

2. Решить систему $\begin{cases}3x+5y=6,\\5x-6y=7\end{cases}$

3. Решить неравенство $\frac{3x+1}{x+3}\geqslant\frac{x+3}{4x+9}$.

4. Теплоход затратил на путь вниз по течению от пункта **A** до пункта **B** 8 часов, а на обратный путь — 10 часов. Найти собственную скорость теплохода, если расстояние между **A** и **B** 200 км.

5. Найти наименьший положительнй корень уравнения $\cos^2 2x+\cos^2 3x=1$

6. На фирме **A** сотрудники с высшим образованием составляют 20%, на фирме **B** этот показатель равен 60%. После слияния фирм **A** и **B** образовалась фирма **C**, на которой тот же показатель стал равен 50%. Найти отношение количества сотрудников фирмы **A** к количеству сотрудников фирмы **B** до слияния.

7. В треугольник ABC $\angle A=30^0$ вписана окружность радиуса 3, которая касается стороны AB в точке P, а стороны AC в точке Q. Найти длину отрезка PQ.

8. Две стороны треугольника 12 и 14, медиана к третьей стороне 8. Найти площадь треугольника.

9. Вычислить $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha$, если $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{2}{3}$.

10. Найти площадь фигуры, задаваемой на плоскости решением системы $\begin{cases}x^2+y^2-2x-3\leqslant 0,\\x\leqslant 0\end{cases}$

11. При каких a уравнение $\frac{56\cdot|x-8|}{x-8}=ax$ не имеет решений?

12. Дана последовательность $\{x_n\}$ такая, что $x_1=1$, $x_2=3$ и для всех $n\geqslant 3$ $x_n=|x_{n-1}-x_{n-2}|$. Вычислить x_{2023}.

Удмуртский государственный университет
Министерство цифрового развития УР
Институт математики, информационных технологий и физики
Уральский математический центр
Олимпиада по математике, 6 апреля 2024 года, 10 класс, **вариант 4.**

1. Вычислить $15^{-1{,}25}\cdot 9^{-\frac{3}{8}}\cdot 25^{\frac{5}{8}}$.

2. Решить систему $\begin{cases}3x+4y=8,\\5x-6y=7\end{cases}$

3. Решить неравенство $\frac{2x+1}{x+2}\geqslant\frac{2x-1}{x-2}$.

4. Теплоход затратил на путь вниз по течению от пункта **A** до пункта **B** 5 часов, а на обратный путь — 10 часов. Найти собственную скорость теплохода, если расстояние между **A** и **B** 100 км.

5. Найти наименьший положительнй корень уравнения $\cos^2 x+\cos^2 3x=1$.

6. На фирме **A** сотрудники с высшим образованием составляют 40%, на фирме **B** этот показатель равен 70%. После слияния фирм **A** и **B** образовалась фирма **C**, на которой тот же показатель стал равен 50%. Найти отношение количества сотрудников фирмы **A** к количеству сотрудников фирмы **B** до слияния.

7. В треугольник ABC $\angle A=120^0$ вписана окружность радиуса $5\sqrt{3}$, которая касается стороны AB в точке P, а стороны AC в точке Q. Найти длину отрезка PQ.

8. Две стороны треугольника 10 и 12, медиана к третьей стороне 7. Найти площадь треугольника.

9. Вычислить $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha$, если $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{2}{3}$.

10. Найти площадь фигуры, задаваемой на плоскости решением системы $\begin{cases}x^2+y^2-2y-3\leqslant 0,\\y\leqslant 0\end{cases}$

11. При каких a уравнение $\frac{36\cdot|x-4|}{x-4}=ax$ не имеет решений?

12. Дана последовательность $\{x_n\}$ такая, что $x_1=1$, $x_2=4$ и для всех $n\geqslant 3$ $x_n=|x_{n-1}-x_{n-2}|$. Вычислить x_{2022}.

Удмуртский государственный университет
Министерство цифрового развития УР
Институт математики, информационных технологий и физики
Уральский математический центр
Олимпиада по математике, 6 апреля 2024 года, 11 класс, **I вариант**

1. Вычислить $\left(\sqrt{a} : a^{\frac{1}{6}}\right)^2$ при $a = 64$.
Ответ: 16.

2. Решить систему $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 3x - 2y = 7 \end{cases}$

Ответ: $\left(\frac{11}{5}; -\frac{1}{5}\right)$. Умножив первое уравнение на (-2), второе уравнение на 3, получим систему $\begin{cases} -4x + 6y = -10 \\ 9x - 6y = 21 \end{cases}$ Сложим последние два уравнения, получим $5x = 11$, откуда $x = \frac{11}{5}$. Аналогично находится y.

3. Решить неравенство $\frac{2x-1}{x+1} \geqslant \frac{2x+1}{x+3}$
Ответ: $x \in (-3; -1) \cup [2; +\infty)$.
Приведем неравенство к виду

$$\frac{2x-1}{x+1} - \frac{2x+1}{x+3} \geqslant 0 \text{ или } \frac{2x-4}{(x+1)(x+3)} \geqslant 0.$$

Решая последнее неравенство методом интервалов, получаем ответ.

4. Изделие было уценено первый раз на $x\%$, второй раз на $(0,8x)\%$. При каких x итоговая цена составит не менее 60% от первоначальной цены.

Ответ: $x \in [0; 25]$. Примем первоначальную стоимость изделия за 1. Тогда после первого понижения цены, стоимость будет $\left(1 - \frac{x}{100}\right)$, а после второго понижения стоимость будет равна $\left(1 - \frac{x}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{0,8x}{100}\right)$. По условию требуется, чтобы эта стоимость была не менее $\frac{60}{100}$. Получаем неравенство

$$\left(1 - \frac{x}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{0,8x}{100}\right) \geqslant \frac{60}{100}.$$

Обозначив через $t = \frac{x}{100}$, получим неравенство

$$(1-t)(1-0,8t) \geqslant 0,6 \text{ или } 0,8t^2 - 1,8t + 0,4 \geqslant 0,$$

решением которого будет $t \in (-\infty; \frac{1}{4}] \cup [2; +\infty)$. Из условия задачи следует, что $t \in [0; 1]$. Тогда получаем, что нам подходят значения $t \in [0; \frac{1}{4}]$. Следовательно, $x \in [0; 25]$.

5. У Лизы в копилке лежит 22 рублёвых, 3 двухрублёвых, 4 пятирублёвых и 3 десятирублёвых монеты. Лиза наугад достаёт из копилки одну монету. Найдите вероятность того, что оставшаяся в копилке сумма составит более 75 рублей.

Ответ: $\frac{25}{32}$. У Лизы 32 монеты на сумму 78 рублей. Поэтому, чтобы оставшаяся сумма была более 75 рублей нужно, чтобы была вынута рублевая или двухрублевая монета.

6. Найти наибольший корень уравнения $\sin\left(\frac{35\pi}{x}\right) + \frac{1}{2} = 0$.

Ответ: 30. Имеем

$$\frac{35\pi}{x} = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \text{ или } \frac{35\pi}{x} = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, n, k \in Z.$$

Отсюда

$$x = \frac{210\pi}{12\pi n - \pi}, \quad x = \frac{210\pi}{12\pi k - 5\pi}.$$

Поэтому

$$x = \frac{210}{12n - 1}, \quad x = \frac{210}{12k - 5}, \ n, k \in Z.$$

Так как числители дробей положительны и постоянны, то дробь будет наибольшей, если знаменатель положителен и наименьший. В первой серии знаменатель положителен и наименьший при $n = 1$, во второй серии при $k = 1$ Получаем $x = \frac{210}{11}$ или $x = \frac{210}{7}$. Осталось выбрать наибольшее из этих двух чисел.

Замечание. Правильное нахождение всех корней уравнения (без отбора нужного корня) — **не более трех баллов**.

7. Решить уравнение $x^2 \log_{\frac{1}{27}}(5-x) = \log_{\frac{1}{3}}(x^2-10x+25)$.

Ответ: $\{4, \sqrt{6}, -\sqrt{6}\}$. ОДЗ уравнения определяется условиями $\begin{cases} 5-x>0 \\ x^2-10x+25>0. \end{cases}$ Получаем $x \in (-\infty; 5)$. Представим уравнение в виде

$$x^2 \log_{\left(\frac{1}{3}\right)^3}(5-x) = \log_{\frac{1}{3}}(5-x)^2$$

Воспользовавшись свойствами логарифма, получаем уравнение

$$\frac{1}{3}x^2 \log_{\frac{1}{3}}(5-x) = 2\log_{\frac{1}{3}}(5-x), \text{ или } \quad \left(\frac{x^2}{3}-2\right)\cdot \log_{\frac{1}{3}}(5-x) = 0.$$

Откуда $\log_{\frac{1}{3}}(5-x) = 0$ или $\frac{1}{3}x^2 - 2 = 0$. Решая два последних уравнения, получим $x = 4, x = \pm\sqrt{6}$. Так как все найденные корни входят в ОДЗ, то получаем ответ.

8. Затраты на 1 час движения поезда со скоростью vкм/час вычисляются по формуле $C = 2160 + \frac{v^3}{200}$ условных единиц. При какой скорости движения затраты на 1км пути будут наименьшими?

Ответ: 60км/час. Пусть скорость vкм/час. Тогда 1 км поезд проходит за время $\frac{1}{v}$ часов и поэтому затраты на движение будут равны

$$f(v) = \frac{1}{v}\cdot\left(2160 + \frac{v^3}{200}\right) = \frac{2160}{v} + \frac{v^2}{200}.$$

Получаем задачу о нахождении наименьшего значения функции f на множестве $v > 0$. Воспользуемся производной

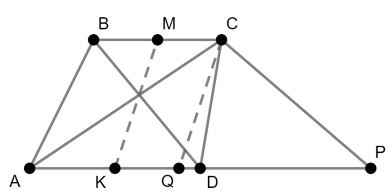
$$f'(v) = -\frac{2160}{v^2} + \frac{v}{100} = \frac{v^3 - 216000}{100v^2}$$

Используя метод интервалов, получим что функция f убывает на промежутках $(-\infty; 0)$, $(0, 60]$ и возрастает на промежутке $[60; +\infty)$. Нас интересуют только $v > 0$. Поэтому наименьшее значение функция f принимает при $v = 60$.

Замечание. Правильное составление функции, вычисление производной, нахождение корней производной (без доказательства того, что корень производной точка глобального минимума) — **не более трех баллов.**

9. Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны. Одна из них равна 6. Отрезок, соединяющий середины оснований, равен 4,5. Найти площадь трапеции.

Ответ: $9\sqrt{5}$.



Пусть M, K — середины оснований BC и AD трапеции $ABCD$. Через вершину C проведем прямую, параллельную диагонали BD (Считаем, что $BD = 6$) до пересечения с прямой AD в точке P. Кроме того, через точку C проведем прямую, параллельную MK до пересечения в прямой AD в точке Q. Тогда

$$AQ = AK + KQ = AK + MC = \frac{1}{2}AD + \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}(AD + BC) = \frac{1}{2}AP$$

Поэтому CQ — медиана треугольника ACP, а так как $\angle ACP = 90^0$, то $AQ = QP = CQ = 4,5$. Поэтому $AP = 9$. Тогда $AC = 3\sqrt{5}$. Следовательно,

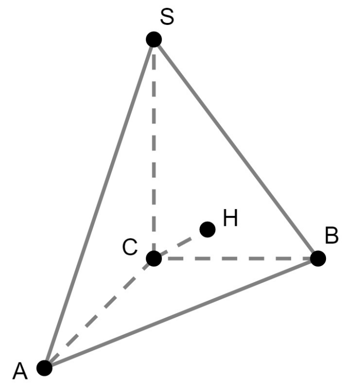
$$S_{ABCD} = S_{ACP} = \frac{1}{2}AC\cdot CP = \frac{1}{2}3\sqrt{5}\cdot 6 = 9\sqrt{5}.$$

10. $SABC$ — пирамида, $AC = CB = 5$, $\angle ACB = 90^0$, $SC = 12$ и ребро SC перпендикулярно плоскости основания ABC. Найти расстояние от точки C до плоскости ASB.

Ответ: $\frac{60}{\sqrt{313}}$.

Пусть CH — перпендикуляр к плоскости ASB. Тогда справедливо равенство

$$V_{SABC} = \frac{1}{6}AC\cdot CB\cdot SC = \frac{1}{3}CH\cdot S_{ASB}.$$



Откуда получаем

$$CH = \frac{AC \cdot CB \cdot SC}{2S_{ASB}}.$$

По теореме Пифагора, $AS = SB = 13$, $AB = 5\sqrt{2}$. Пусть SL — высота треугольника ASB. Так как треугольник ASB равнобедренный, то $AL = \frac{5\sqrt{2}}{2}$. Тогда по теореме Пифагора

$$SL^2 = AS^2 - AL^2 = 169 - \frac{25}{2} = \frac{313}{2}.$$

Значит $SL = \sqrt{\frac{313}{2}}$. Поэтому $S_{ASB} = \frac{1}{2} AB \cdot SL = \frac{5\sqrt{313}}{2}$. Значит $CH = \frac{60}{\sqrt{313}}$.

11. Найти все значения параметра a при каждом из которых хотя бы одно решение неравенства $|x-1| \leqslant 5$ не является решением неравенства $|x-4| < a$.

Ответ: $(-\infty; 8]$. Решим сначала противоположную задачу. Найдем все значения параметра a, при каждом из которых все решения неравенства $|x-1| \leqslant 5$ являются решение неравенства $|x-4| < a$. Неравенство $|x-1| \leqslant 5$ равносильно системе

$$\begin{cases} x-1 \leqslant 5 \\ x-1 \geqslant -5, \end{cases}$$

откуда получаем, что $x \in [-4; 6]$. Неравенство $|x-4| < a$ при $a > 0$(при $a \leqslant 0$ неравенство решений не имеет) равносильно системе

$$\begin{cases} x-4 < a, \\ x-4 > -a, \end{cases}$$

откуда $x \in (4-a; 4+a)$. Отрезок $[-4; 6]$ будет содержаться в интервале $(4-a; 4+a)$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} 4-a < -4 \\ 4+a > 6, \end{cases}$$

откуда $a > 8$. Значит условию нашей задачи удовлетворяют все $a \in (-\infty; 8]$.

12. Представить дробь $\frac{3}{5}$ в виде суммы попарно различных дробей, у каждой из которых числитель равен 1.

Воспользуемся тождеством

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)} \qquad (1)$$

Представим $\frac{3}{5}$ в виде $\frac{3}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$. В формуле (1) возьмем $n = 5$. Получим

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{6} + \frac{1}{30}$$

Применив формулу (1) для $n = 6$ и $n = 30$, получаем

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{7} + \frac{1}{42}, \quad \frac{1}{30} = \frac{1}{31} + \frac{1}{930}.$$

Окончательно получим

$$\frac{3}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{30} + \frac{1}{7} + \frac{1}{42} + \frac{1}{31} + \frac{1}{930}.$$

Удмуртский государственный университет
Министерство цифрового развития УР
Институт математики, информационных технологий и физики
Уральский математический центр
Олимпиада по математике, 6 апреля 2024 года, 11 класс, **2 вариант**

1. Вычислить $\left(\sqrt[3]{a} : a^{\frac{1}{6}}\right)^2$ при $a = 27$.

2. Решить систему $\begin{cases} 3x - 4y = 5 \\ 2x - 3y = 7 \end{cases}$

3. Решить неравенство $\frac{2x}{x+2} \geqslant \frac{2x+1}{x+3}$

4. Изделие было уценено первый раз на $x\%$, второй раз на $(2,5x)\%$. При каких x итоговая цена составит не менее 180% от первоначальной цены.

5. У Лизы в копилке лежит 12 рублёвых, 6 двухрублёвых, 4 пятирублёвых и 3 десятирублёвых монеты. Лиза наугад достаёт из копилки одну монету. Найдите вероятность того, что оставшаяся в копилке сумма составит меньше 70 рублей.

6. Найти наибольший корень уравнения $\cos\left(\frac{70\pi}{x}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$.

7. Решить уравнение $x^2 \log_{\frac{1}{8}}(6 - x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 12x + 36)$.

8. Затраты на 1 час движения поезда со скоростью vкм/час вычисляются по формуле $C = 980 + \frac{v^3}{700}$ условных единиц. При какой скорости движения затраты на 1км пути будут наименьшими?

9. Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны. Одна из них равна 7. Отрезок, соединяющий середины оснований, равен 6,5. Найти площадь трапеции.

10. $SABC$ — пирамида, $AC = CB = 6$, $\angle ACB = 90^0$, $SC = 8$ и ребро SC перпендикулярно плоскости основания ABC. Найти расстояние от точки C до плоскости ASB.

11. Найти все значения параметра a при каждом из которых хотя бы одно решение неравенства $|x - 3| \leqslant 6$ не является решением неравенства $|x - 2| < a$.

12. Представить дробь $\frac{3}{7}$ в виде суммы попарно различных дробей, у каждой из которых числитель равен 1.

Удмуртский государственный университет
Министерство цифрового развития УР
Институт математики, информационных технологий и физики
Уральский математический центр
Олимпиада по математике, 6 апреля 2024 года, 11 класс, **3 вариант**

1. Вычислить $\left(\sqrt[4]{a} : a^{\frac{1}{6}}\right)^3$ при $a = 16$.

2. Решить систему $\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases}$

3. Решить неравенство $\frac{x}{x+4} \geqslant \frac{x+2}{x+3}$

4. Изделие было уценено первый раз на $x\%$, второй раз на $(\frac{4}{3}x)\%$. При каких x итоговая цена составит не ниже первоначальной цены.

5. У Лизы в копилке лежит 12 рублёвых, 6 двухрублёвых, 5 пятирублёвых и 3 десятирублёвых монеты. Лиза наугад достаёт из копилки одну монету. Найдите вероятность того, что оставшаяся в копилке сумма составит не менее 73 рублей.

6. Найти наибольший корень уравнения $\sin\left(\frac{20\pi}{x}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$.

7. Решить уравнение $x^2 \log_{\frac{1}{81}}(5 - x) = \log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 10x + 25)$.

8. Затраты на 1 час движения поезда со скоростью vкм/час вычисляются по формуле $C = 1600 + \frac{v^3}{640}$ условных единиц. При какой скорости движения затраты на 1км пути будут наименьшими?

9. Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны. Одна из них равна 8. Отрезок, соединяющий середины оснований, равен 7,5. Найти площадь трапеции.

10. $SABC$ — пирамида, $AC = CB = 8$, $\angle ACB = 90^0$, $SC = 6$ и ребро SC перпендикулярно плоскости основания ABC. Найти расстояние от точки C до плоскости ASB.

11. Найти все значения параметра a при каждом из которых хотя бы одно решение неравенства $|x - 2| \leqslant 5$ не является решением неравенства $|x - 3| < a$.

12. Представить дробь $\frac{3}{13}$ в виде суммы попарно различных дробей, у каждой из которых числитель равен 1.

Удмуртский государственный университет
Министерство цифрового развития УР
Институт математики, информационных технологий и физики
Уральский математический центр
Олимпиада по математике, 6 апреля 2024 года, 11 класс, **вариант 4**

1. Вычислить $\left(\sqrt{a} : a^{\frac{2}{3}}\right)^{-2}$ при $a = 8$.

2. Решить систему $\begin{cases} 3x - 7y = 7 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}$

3. Решить неравенство $\frac{x+1}{x+3} \geqslant \frac{x+2}{x+4}$

4. Изделие было уценено первый раз на $x\%$, второй раз на $(\frac{20}{21}x)\%$. При каких x итоговая цена составит не менее 50% от первоначальной цены.

5. У Лизы в копилке лежит 12 рублёвых, 6 двухрублёвых, 4 пятирублёвых и 3 десятирублёвых монеты. Лиза наугад достаёт из копилки одну монету. Найдите вероятность того, что оставшаяся в копилке сумма составит более 70 рублей.

6. Найти наибольший корень уравнения $\sin\left(\frac{35\pi}{x}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$.

7. Решить уравнение $x^2 \log_{\frac{1}{16}}(4 - x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 8x + 16)$.

8. Затраты на 1 час движения поезда со скоростью vкм/час вычисляются по формуле $C = 4050 + \frac{v^3}{360}$ условных единиц. При какой скорости движения затраты на 1км пути будут наименьшими?

9. Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны. Одна из них равна 9. Отрезок, соединяющий середины оснований, равен 8,5. Найти площадь трапеции.

10. $SABC$ — пирамида, $AC = CB = 12$, $\angle ACB = 90^0$, $SC = 5$ и ребро SC перпендикулярно плоскости основания ABC. Найти расстояние от точки C до плоскости ASB.

11. Найти все значения параметра a при каждом из которых хотя бы одно решение неравенства $|x - 4| \leqslant 5$ не является решением неравенства $|x - 3| < a$.

12. Представить дробь $\frac{3}{11}$ в виде суммы попарно различных дробей, у каждой из которых числитель равен 1.