ЗАОЧНАЯ ОЛИМПИАДА — 2024
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
1 КУРС ВСЕ НАПРАВЛЕНИЯ

1. Функция $y = F(x)$ определена на всей числовой прямой и является четной периодической функцией с периодом, равным 6. На отрезке $[0, 3]$ функция задана равенством $F(x) = x^2 - 4x + 1$. Определите количество нулей функции на отрезке $[-3, 5]$.

2. Докажите ограниченность функции $g(x) = \dfrac{2\sin x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$ на всей области определения.

3. Найдите $\sup x_n$, $\inf x_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, где

а) $x_n = (-1)^n \left(3 - \dfrac{2}{n}\right)$, б) $x_n = (-1)^{n-1} \left(3 + \dfrac{2}{n}\right)$.

Будут ли данные последовательности ограничены?

4. Найдите множество значений функции: $y = \sqrt{x^2 + 5x + 4} - x$.

5. Решите уравнение: $\sqrt{x^2 - 2x - 3} = 4x - x^2 - 3$.

6. Решите неравенство:

$$3^{-|x-3|} \log_3 \left(6x - x^2 - 6\right) \geqslant 1.$$

7. Дана функция $f(x) = \sin^4 x + \sin^4 \left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

а) Докажите тождество: $f(x) = \dfrac{3}{4} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} \sin \left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

б) Найдите такие значения a, c, d, что производную функции можно представить в виде: $f'(x) = cf(x + a) + d$.

8. Не используя калькулятор, сравните два числа: e^π и π^e.

9. Найдите все значения параметра b, при которых функция

$$f(x) = 18 - x^5 - 5x^3 + 5(b - 2)x$$

убывает на всей числовой прямой.

10. В нейросетях часто используется функция сигмоида: $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{-\frac{x}{T}}}$. Исследуйте данную функцию и постройте её графики в зависимости от параметра T. Проверьте формулу: $f'(x) = f(x) \cdot (1 - f(x))$.

11. Определите α и β так, чтобы имело место равенство

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt[3]{1 - x^3} - \alpha x - \beta\right) = 0.$$

12. Найдите $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[1-\cos x]{1 - 3x^2 e^x}$.

13. Исследуйте на непрерывность и постройте график функции

$$y = \lim_{n\to\infty} \frac{x^3 - xe^{-nx}}{2 + e^{-nx}}.$$

14. Последовательность вещественных чисел $\{x_n\}$ задана рекуррентным соотношением:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{7}{x_n}\right), \ n \in \mathbb{N}.$$

Для любого начального значения x_1 исследуйте последовательность на сходимость и в случае сходимости найдите её предел.

15. Найдите длину кривой, построенной с помощью следующего итерационного процесса. За основу берется отрезок. Отрезок делится на три части, на средней её части строится квадрат и стирается та его сторона, имеющую общая часть с отрезком, который делили. Получаем ломаную из пяти звеньев. Затем с каждым отрезком ломаной поступаем аналогично: делим на три части, на серединке достраиваем до квадрата, стирая ту его сторону, которая имеет общие точки с отрезком деления, и т.д.

16. Для функции $f(x)$ известны значения: $f(1) = -2$, $f(2) = 1$, $f(4) = 3$. Функцию интерполируют ломаной — сплайном первой степени (кусочно–линейной функцией). Запишите аналитическое выражение для ломаной (сплайна) и найдите производную построенной функции (сплайна) в каждой точке отрезка $[1, 4]$.

17. Найдите сумму: $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$.

18. Докажите неравенство наибольшим количеством способов:

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} < 1.$$

19. При каком значении параметра a парабола $y = ax^4$ касается кривой $y = \ln x$?

20. Пусть функция $f(x)$ определена на $[a, b]$. Как соотносятся (или связаны) между собой понятия: «непрерывная функция», «дифференцируемая функция», «ограниченная функция», «монотонная функция», «непрерывно–дифференцируемая функция», «равномерно непрерывная функция». Ответ обоснуйте с помощью соответствующих утверждений или примеров из курса МА.