

**ЗАОЧНАЯ ОЛИМПИАДА — 2024**  
**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ**  
**2 КУРС ВСЕ НАПРАВЛЕНИЯ**

1. Функция  $y = F(x)$  определена на всей числовой прямой и является четной периодической функцией с периодом 6. На отрезке  $[0, 3]$  функция задана равенством  $F(x) = x^2 - 4x + 1$ . Определите количество нулей функции на отрезке  $[-3, 5]$ .

2. Докажите ограниченность функции  $g(x) = x - \sqrt{x^2 - 1}$  на множестве  $[1, +\infty)$ .

3. Найдите  $\sup x_n, \inf x_n, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ , где

$$\text{а)} x_n = (-1)^n \left( 3 - \frac{2}{n} \right), \quad \text{б)} x_n = (-1)^{n-1} \left( 3 + \frac{2}{n} \right).$$

Будут ли данные последовательности ограниченны?

4. Найдите множество значений функции:  $y = 3^{2+x-x^2}$ .

5. Исследуйте последовательность  $\{x^{2n}\}$  при  $x \in [-1, 1]$  на сходимость:

а) поточечную, б) равномерную.

6. Решите уравнение:

$$\left( \frac{1}{3} \right)^{x^2+2x} = 4 - \left| \sin \frac{\pi(x-1)}{4} \right|.$$

7. Решите неравенство:

$$3^{-|x-3|} \log_3 (6x - x^2 - 6) \geq 1.$$

8. Данна функция  $f(x) = \sin^4 x + \sin^4 \left( x + \frac{\pi}{4} \right)$ .

а) Докажите тождество:  $f(x) = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \left( 2x - \frac{\pi}{4} \right)$ .

б) Найдите такие значения  $a, c, d$ , что производную функции можно представить в виде:  $f'(x) = cf(x+a) + d$ .

9. Что больше  $n^{n+1}$  и  $(n+1)^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ? Обоснуйте!

10. В нейросетях часто используется функция сигмоида:  $f(x) = \frac{1}{1 + e^{-\frac{x}{T}}}$ .

Исследуйте данную функцию и постройте её графики в зависимости от параметра  $T$ . Проверьте формулу:  $f'(x) = f(x) \cdot (1 - f(x))$ .

11. Определите  $\alpha$  и  $\beta$  так, чтобы имело место равенство

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt[5]{1 - x^5} - \alpha x - \beta \right) = 0.$$

12. Найдите  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[1-\cos x]{1 + x^2 e^x}$ .

13. При каких  $\alpha$  и  $\beta$  данная функция дифференцируема в каждой точке:

$$y = \begin{cases} \alpha + \beta x^2, & |x| \leq 1, \\ \frac{2}{|x| + 1}, & |x| > 1. \end{cases}$$

Будет ли при найденных  $\alpha$  и  $\beta$  эта функция непрерывно-дифференцируемой?

14. Пусть функция  $f(x)$  определена на  $[a, b]$ . Как соотносятся (или связаны) между собой понятия: «непрерывная функция», «дифференцируемая функция», «ограниченная функция», «монотонная функция», «непрерывно-дифференцируемая функция», «равномерно непрерывная функция», «интегрируемая функция». Ответ обоснуйте с помощью соответствующих утверждений или примеров из курса МА.

15. Найдите производную второго порядка от функции  $y = x \cos^2 5x$ .

16. Берется квадрат с длиной стороны, равной единице. Каждая из сторон квадрата делится на три равные части, а весь квадрат, соответственно, на девять одинаковых квадратиков со стороной равной  $1/3$ . Из полученной фигуры вырезается центральный квадрат. Затем такой же процедуре подвергается каждый из 8 оставшихся квадратиков и т.д. Процесс продолжается неограниченно. Пересечение полученных на каждом шаге объединений оставшихся квадратов называется ковром Серпинского. Найдите площадь ковра Серпинского.

17. Докажите тождество при  $|x| \leq 1$

$$2 \operatorname{arctg} x + \arccos \frac{2x}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

18. Найдите интеграл:  $\int \max \{x^3, x\} dx$ .

19. Найдите среднее значение функции:  $f(x) = \sin 2x$  на отрезке  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

20. Определите область сходимости (абсолютной и условной) для функционального ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \left( \frac{3x}{2x-1} \right)^n.$$