ЗАОЧНАЯ ОЛИМПИАДА — 2024
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
старшие курсы

1. Докажите, что функция $\cos x^2$ является непериодической.

2. Докажите ограниченность функции $g(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}$.

3. Найдите сумму ряда
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

4. Исследуйте последовательность $\{x^{2n}\}$ при $x \in [-1, 1]$ на сходимость: а) поточечную, б) равномерную, в) среднеквадратическую.

5. Проведя полное исследование, постройте график функции:
$$f(x) = \operatorname{tg} \frac{\pi x}{x^2+x+1}.$$
Определите количество решений уравнения $f(x) = a$ в зависимости от a.

6. Решите уравнение:
$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+2x} = 4 - \left|\sin \frac{\pi(x-1)}{4}\right|.$$

7. Решите неравенство:
$$3^{-|x-3|} \log_3 \left(6x - x^2 - 6\right) \geqslant 1.$$

8. Что больше $\log_a(a+1)$ и $\log_{a+1}(a+2)$ при $a > 1$? Обоснуйте!

9. В нейросетях часто используется функция сигмоида: $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{-\frac{x}{T}}}$. Исследуйте данную функцию и постройте её графики в зависимости от параметра T. Проверьте формулу: $f'(x) = f(x) \cdot (1 - f(x))$.

10. При построении нейросетей является популярной функция «софтмакс» $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$, где $f_i(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \dfrac{e^{z_i}}{\sum\limits_{j=1}^{n} e^{z_j}}$, $\quad i = 1, 2, \ldots, n$.

Проверьте формулу:
$$\frac{\partial f_i}{\partial z_i} = f_i \cdot (1 - f_i).$$

11. Определите α и β так, чтобы имело место равенство
$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt[7]{1-x^7} - \alpha x - \beta\right) = 0.$$

12. Найдите $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\sin x) - \operatorname{tg}(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x - \sin x}$.

13. Последовательность вещественных чисел $\{x_n\}$ задана рекуррентным соотношением:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{b}{x_n}\right),\ n \in \mathbb{N},\ b > 0.$$

Для любого начального значения x_1 исследуйте последовательность на сходимость и в случае сходимости найдите её предел. Изменится ли ответ в случае последовательности комплексных чисел?

14. Для функции $f(x)$ известны значения: $f(1) = 3$, $f(2) = 1$, $f(4) = 5$. Функцию интерполируют сплайном второй степени (кусочно–квадратичной функцией) $S_2(x)$ так, что выполнены условия:
1) в точках $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 4$ они совпадают, т.е. $f(x_k) = S_2(x_k)$;
2) производная функции $S_2(x)$ непрерывна на отрезке $[1, 4]$;
3) $S_2'(1) = -1$.
Запишите аналитическое выражение для сплайна и найдите производную $S_2'(3)$.

15. Найдите длину кривой, построенной с помощью следующего итерационного процесса. За основу берется квадрат. Каждая сторона квадрата делится на три части, на средней её части строится квадрат и стирается та сторона квадрата, имеющая общую часть с отрезком, который делили. Получаем ломаную. Затем с каждым отрезком ломаной поступаем аналогично: делим на три части, на серединке достраиваем до квадрата, стирая ту его сторону, которая имеет общие точки с отрезком деления, и т.д.

16. Первичная информация разделяется по n серверам и обрабатывается на них. С k-го сервера при объеме t^2 Гб входящей в него информации выходит $a_k t$, $a_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Каков наибольший общий объем выходящей информации, если первоначально поступила информация объёмом в M Гб? Можно ограничиться исследованием ситуации, когда $n = 2, 3$.

17. Найдите интеграл: $\displaystyle\int \max\left\{x^3, x\right\} dx$.

18. Найдите среднее значение функции: $f(x, y) = |\cos(x + y)|$ на множестве $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

19. Определите область сходимости (абсолютной и условной) для функционального ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{3x}{2x-1}\right)^n.$$

20. Найдите область сходимости интеграла:

$$\int_0^{+\infty} x^{\alpha-2024} \operatorname{arctg}^{1+\alpha} \frac{x}{1+x} dx.$$