Удмуртский государственный университет
Министерство цифрового развития УР
Институт математики, информационных технологий и физики
Уральский математический центр
Олимпиада по математике, 15 апреля 2023 года, 11 класс, вариант 1.

1. Вычислить $\dfrac{49^{\frac{1}{16}} \cdot 7^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{7} \cdot 7^{-\frac{7}{8}} \cdot 49}$

2. Решить систему $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$

3. Решить неравенство $\frac{x-1}{x+1} \geqslant \frac{x+1}{x+3}$

4. Если затраты на покупку бананов возросли на 56%, а цена килограмма бананов увеличилась на 20%, то как изменился вес купленных бананов?

Ответ: увеличится на 30%.

Пусть x — первоначальные затраты, y – цена 1кг. Тогда первоначальный объем бананов равен $\frac{x}{y}$.

После увеличения затрат, объем затрат равен $1,56x$, а стоимость 1 кг стала равна $1,2y$. Новый объем бананов равен $\frac{1,56x}{1,2y} = 1,3\frac{x}{y}$. Следовательно, объем купленых бананов увеличился на 30%.

5. Решить уравнение $10\sin^2\frac{x}{2} + 3\sin x - 5 = 0$

Ответ: $x = 2\operatorname{arctg}\frac{-3-\sqrt{34}}{5} + 2\pi n, n \in Z$; $x = 2\operatorname{arctg}\frac{-3-\sqrt{34}}{5} + 2\pi k, k \in Z$.

Имеем $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$, $1 = \sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}$. Получаем уравнение

$$10\sin^2\frac{x}{2} + 6\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - 5(\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}) = 0, \text{ или}$$
$$5\sin^2\frac{x}{2} + 6\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - 5\cos^2\frac{x}{2} = 0.$$

Отметим, что для данного уравнения $\cos\frac{x}{2} \neq 0$, ибо в противном случае получили бы, что $\sin\frac{x}{2} = 0$, что противоречит основному тригонометрическому тождеству. Поделив уравнение на $\cos^2\frac{x}{2}$, получим уравнение

$$5\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + 6\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 5 = 0,$$

которое заменой $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ сводится к квадратному $5t^2 + 6t - 5 = 0$, откуда легко получить ответ.

6. Решить уравнение $\log^2_{1/7}(49x) - \log_7\left(\frac{x}{7}\right) = 3$

Ответ: $x = \frac{1}{7}$, $x = \frac{1}{49}$.

ОДЗ уравнения $x > 0$. Тогда

$$\log\frac{x}{7} = \log_7 x - 1, \quad \log_{\frac{1}{7}}(49x) = -\log_7(49x) = -2 - \log_7 x.$$

Обозначив $t = \log_7 x$, получим уравнение $(-t-2)^2 - (t-1) - 3 = 0$, или

$$t^2 + 3t + 2 = 0,$$

корнями которого будут $t_1 = -1$, $t_2 = -2$. Решая уравнения $\log_7 x = -1$, $\log_7 x = -2$, получаем ответ.

7. Число a является корнем уравнения $x^2 - x - 3 = 0$. Вычислить $a^5 - 19a$.

Ответ: 21. Так как a корень, то $a^2 = a + 3$. Поэтому

$$a^4 = (a+3)^2 = a^2 + 6a + 9 = a + 3 + 6a + 9 = 7a + 12.$$

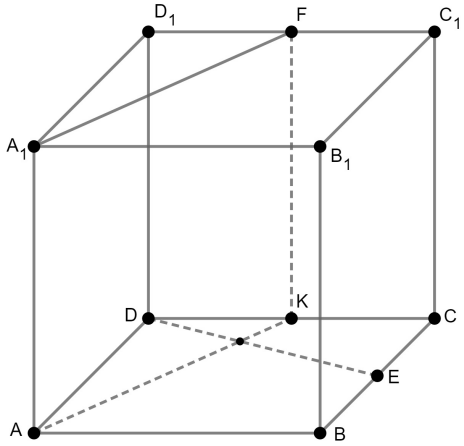
Умножая последнее равенство на a, получим $a^5 = 7a^2 + 12a = 7(a+3) + 12a = 19a + 21$. Тогда

$$a^5 - 19a = 19a + 21 - 19a = 21.$$

8. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб с ребром 6. F — середина C_1D_1, E — середина BC. Найти площадь сечения, проходящего через F перпендикулярно DE.

Ответ: $18\sqrt{5}$.

Проведем $FK||C_1C$. Тогда FK перпендикулярно DE. Отметим, что треугольники ADK и DCE равны. Тогда $\angle EDC + \angle AKD = \angle EDC + \angle DEC = 90^0$. Следовательно, прямые DE и AK перпендикулярны. Поэтому плоскость, проходящая через AK и KF будет перпендикулярна прямой DE. Отсюда получаем, что сечение будет прямоугольник $AKFA_1$ у которого $AK = \sqrt{9+36} = 3\sqrt{5}$, $AA_1 = 6$. Значит площадь равна $18\sqrt{5}$.



9. Написать уравнение касательной к графику функции $y = x^5 + 4x$ для которой существует параллельная или совпадающая с ней касательная к графику функции $y = \sin 4x + 10$

Ответ: $y = 4x$. Пусть x_1 — абсцисса точки касания касательной с графиком функции $f(x) = x^5 + 4x$, x_2 — точка касания касательной с графиком функции $g(x) = \sin 4x + 10$. Так как касательные параллельны или совпадают, то выполняется равенство

$$f'(x_1) = g'(x_2).$$

Получаем

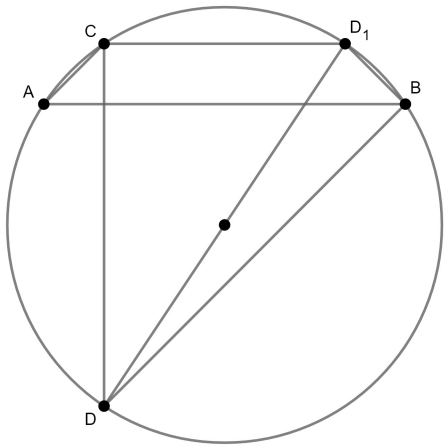
$$5x_1^4 + 4 = 4\cos x_2. \tag{1}$$

Так как $\cos x_2 \in [-1; 1]$, то $4\cos x_2 \in [-4; 4]$, а $5x_1^2 + 4 \geqslant 4$. Поэтому равенство (1) справедливо тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} 5x_1^2 + 4 = 4, \\ 4\cos x_2 = 4. \end{cases}$$

Отсюда $x_1 = 0$. Уравнение касательной имеет вид $y = f(x_1) + f'(x_1)(x - 0)$. Получаем $y = 4x$.

10. В окружности радиуса 5 пересекающиеся хорды AB и CD перпендикулярны. Найти BD, если $AC = 6$.
Ответ: $BD = 8$.



Проведем диаметр DD_1. Тогда $CD_1 || AB$. Следовательно, $AC = D_1B$. По теореме Пифагора для треугольника DBD_1 получаем $DB = \sqrt{DD_1^2 - D_1B^2} = 8$.

11. Найти все значения параметра a при каждом из которых неравенство $\dfrac{x + 3a - 2}{x - 2a - 1} \leqslant 0$ справедливо для всех $x \in [3; 4]$.

Ответ: $a \in (-\infty; -\frac{2}{3}] \cup (\frac{3}{2}; +\infty)$.

Решаем неравенство методом интервалов. Корень числителя – $(2 - 3a)$, корень знаменателя – $(2a + 1)$.

Если $2 - 3a < 2a + 1$, то решением неравенства будет $[2 - 3a, 2a + 1)$. Неравенство будет выполняться для всех

$x \in [3;4]$, если

$$\begin{cases} 2-3a < 2a+1, \\ 3 \geqslant 2-3a, \\ 2a+1 > 4, \end{cases}$$

откуда получаем, что $a \in \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

Если $2-3a > 2a+1$, то решением неравенства будет $[2a+1, 2-3a)$. Неравенство будет выполняться для всех $x \in [3;4]$, если

$$\begin{cases} 2-3a > 2a+1, \\ 3 > 2a+1, \\ 2-3a \geqslant 4, \end{cases}$$

откуда получаем, что $a \in \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right]$.

Если $2-3a = 2a+1$, то неравенство не имеет решений.

12. Последовательность $x_1, x_2, \ldots,$ такова, что $x_1 = 33$, $x_n = \frac{n}{x_{n-1}}$ для всех $n > 1$. На сколько нулей оканчивается число равное произведению $x_1 x_2 \ldots x_{2022}$?

Ответ: 251. Имеем

$$x_2 = \frac{2}{x_1},\ x_4 = \frac{4}{x_3},\ x_6 = \frac{6}{x_5}, \ldots, x_{2020} = \frac{2020}{x_{2019}},\ x_{2022} = \frac{2022}{x_{2021}}.$$

Отсюда

$$x_1 x_2 = 2,\ x_3 x_4 = 4,\ x_5 x_6 = 6,\ \ldots, x_{2019} x_{2020} = 2020,\ x_{2021} x_{2022} = 2022.$$

Значит

$$x_1 x_2 x_3 \ldots x_{2021} x_{2022} = (x_1 x_2)(x_3 x_4)(x_5 x_6) \ldots (x_{2019} x_{2020})(x_{2021} x_{2022}) =$$
$$= 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 2020 \cdot 2022 = (2 \cdot 1)(2 \cdot 2)(2 \cdot 3) \ldots (2 \cdot 1010)(2 \cdot 1011) = 2^{1011} 1011!$$

Так как 0 получается при умножении простых чисел 2 и 5, то количество нулей нашего произведения равно количеству 5 в разложении 1011! на простые множители.

Пусть $[a]$ обозначает целую часть числа a. Тогда количество пятерок равно

$$\left[\frac{1011}{5}\right] + \left[\frac{1011}{25}\right] + \left[\frac{1011}{125}\right] + \left[\frac{1011}{625}\right] = 202 + 40 + 8 + 1 = 251.$$

Удмуртский государственный университет
Министерство цифрового развития УР
Институт математики, информационных технологий и физики
Уральский математический центр
Олимпиада по математике, 15 апреля 2023 года, 11 класс, вариант 2.

1. Вычислить $\dfrac{25^{\frac{1}{18}} \cdot 5^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{5} \cdot 5^{-\frac{8}{9}} \cdot 25}$

2. Решить систему $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases}$

3. Решить неравенство $\frac{x}{x+2} \geqslant \frac{x+1}{x+3}$

4. Если затраты на покупку бананов возросли на 82%, а цена килограмма бананов увеличилась 30%, то как изменился вес купленных бананов?

5. Решить уравнение $4\cos^2\frac{x}{2} - 5\sin x - 2 = 0$.

6. Решить уравнение $\log_{1/6}^2(36x) + \log_6\left(\frac{x}{6}\right) = -3$

7. Число a является корнем уравнения $x^2 - x - 4 = 0$. Вычислить $a^5 - 29a$.

8. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб с ребром 8. F — середина C_1D_1, E — середина BC. Найти площадь сечения, проходящего через E перпендикулярно B_1F.

9. Написать уравнение касательной к графику функции $y = x^5 + 5x$ для которой существует параллельная или совпадающая с ней касательная к графику функции $y = \sin 5x - 1$

10. В окружности радиуса 5 пересекающиеся хорды AB и CD перпендикулярны. Найти AD, если $BC = 8$.

11. Найти все значения параметра a при каждом из которых неравенство $\dfrac{x+4a-3}{x-2a-1} \leqslant 0$ справедливо для всех $x \in [2;4]$.

12. Последовательность $x_1, x_2, \ldots,$ такова, что $x_1 = 37$, $x_n = \frac{n-1}{x_{n-1}}$ для всех $n > 1$. На сколько нулей оканчивается число равное произведению $x_1 x_2 \ldots x_{2022}$?

Удмуртский государственный университет
Министерство цифрового развития УР
Институт математики, информационных технологий и физики
Уральский математический центр
Олимпиада по математике, 15 апреля 2023 года, 11 класс, вариант 3.

1. Вычислить $\dfrac{36^{\frac{1}{16}} \cdot 6^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{6} \cdot 6^{-\frac{7}{8}} \cdot 36}$

2. Решить систему $\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$

3. Решить неравенство $\frac{x}{x+1} \geqslant \frac{x+1}{x+3}$

4. Если затраты на покупку бананов возросли на 76%, а цена килограмма бананов увеличилась на 10%, то как изменился вес купленных бананов?

5. Решить уравнение $4\sin^2\frac{x}{2} - 5\sin x - 2 = 0$.

6. Решить уравнение $\log^2_{1/5}\left(\frac{x}{25}\right) - \log_5(25x^2) = 9$.

7. Число a является корнем уравнения $x^2 - x - 1 = 0$. Вычислить $a^5 - 4a$.

8. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб с ребром 6. F — середина C_1B_1, E — середина AB. Найти площадь сечения, проходящего через F перпендикулярно CE.

9. Написать уравнение касательной к графику функции $y = -x^3 - 3x$ для которой существует параллельная или совпадающая с ней касательная к графику функции $y = \cos 3x + 1$

10. В окружности радиуса 10 пересекающиеся хорды AB и CD перпендикулярны. Найти BD, если $AC = 12$.

11. Найти все значения параметра a при каждом из которых неравенство $\dfrac{x + 3a - 2}{x - 4a - 1} \leqslant 0$ справедливо для всех $x \in [3; 5]$.

12. Последовательность $x_1, x_2, \ldots,$ такова, что $x_1 = 45$, $x_n = \frac{n}{x_{n-1}}$ для всех $n > 1$. На сколько нулей оканчивается число равное произведению $x_1 x_2 \ldots x_{2020}$?

Удмуртский государственный университет
Министерство цифрового развития УР
Институт математики, информационных технологий и физики
Уральский математический центр
Олимпиада по математике, 15 апреля 2023 года, 11 класс, вариант 4.

1. Вычислить $\dfrac{64^{\frac{1}{18}} \cdot 8^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{8} \cdot 8^{-\frac{8}{9}} \cdot 64}$

2. Решить систему $\begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$

3. Решить неравенство $\frac{x+1}{x+2} \geqslant \frac{x+2}{x+3}$

4. Если затраты на покупку бананов возросли на 92%, а цена килограмма бананов увеличилась 60%, то как изменился вес купленных бананов?

5. Решить уравнение $10\cos^2\frac{x}{2} + 3\sin x - 5 = 0$

6. Решить уравнение $\log^2_{1/3}(9x) + \log_3\left(\frac{x}{3}\right) = 9$

7. Число a является корнем уравнения $x^2 - 2x - 2 = 0$. Вычислить $a^5 - 44a$.

8. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб с ребром 8. F — середина C_1B_1, E — середина AD. Найти площадь сечения, проходящего через F перпендикулярно CE.

9. Написать уравнение касательной к графику функции $y = x^3 + 3x$ для которой существует параллельная или совпадающая с ней касательная к графику функции $y = \sin 3x + 1$

10. В окружности радиуса 10 пересекающиеся хорды AB и CD перпендикулярны. Найти AD, если $BC = 16$.

11. Найти все значения параметра a при каждом из которых неравенство $\dfrac{x + 3a - 4}{x - 2a - 1} \leqslant 0$ справедливо для всех $x \in [2; 4]$.

12. Последовательность $x_1, x_2, \ldots,$ такова, что $x_1 = 33$, $x_n = \frac{n-1}{x_{n-1}}$ для всех $n > 1$. На сколько нулей оканчивается число равное произведению $x_1 x_2 \ldots x_{2024}$?

Удмуртский государственный университет
Министерство цифрового развития УР
Институт математики, информационных технологий и физики
Уральский математический центр
Олимпиада по математике, 15 апреля 2023 года, 10 класс, вариант 1.

1. Вычислить $\frac{14^9 \cdot 49^7}{4^4 \cdot 7^{15}}$

2. Решить систему $\begin{cases} 3x + 4y = 5, \\ 5x + 6y = 7 \end{cases}$

3. Решить неравенство $\frac{3x}{2x+1} \geqslant \frac{x+3}{3x+1}$.

4. Вкладчик положил в банк под p процентов годовых 12500 рублей. Через год он снял со своего счета 7500 рублей, а еще через год на счету у него оказалось 6875 рублей. Найти p.

Ответ: $p = 10\%$. Через год на счету у вкладчика будет

$$12500 + 12500 \cdot \frac{p}{100} = 12500\Big(1 + \frac{p}{100}\Big),$$

а еще через год

$$\Big(12500\big(1 + \frac{p}{100}\big) - 7500\Big)\Big(1 + \frac{p}{100}\Big) = 6875.$$

Обозначив $x = 1 + \frac{p}{100}$, получим уравнение $12500x^2 - 7500x - 6875 = 0$, или $20x^2 - 12x - 11 = 0$. Его корнями будут $x_1 = 1,1$, $x_2 = -0,5$. Поэтому $p = 10\%$.

5. Из пункта **A** в пункт **B** выехала грузовая машина. Одновременно навстречу ей из пункта **B** в пункт **A** выехала легковая машина. Через некоторое время они встретились и после этого грузовая машина ехала до **B** еще 8 часов, а легковая до **A** — еще 2 часа. Найти отношение скоростей.

Ответ: 2 .

Пусть скорость грузовой машины x, скорость легковой y, время до встречи t. Тогда до встречи грузовая машина проехала расстояние xt, которое затем легковой автомобиль проехал за 2 часа. Легковой автомобиль до встречи проехал расстояние yt, которое затем грузовая машина проехала за 8 часов. Получаем

$$xt = 2y, \quad yt = 8x.$$

Отсюда

$$\frac{xt}{yt} = \frac{2y}{8x}, \quad \text{или} \quad 4x^2 = y^2.$$

Значит $y = 2x$.

6. Число a является корнем уравнения $x^2 - 2x - 85 = 0$. Вычислить $a^4 - 348a$.

Ответ: 7565. Из условия задачи следует, что $a^2 = 2a + 85$. Тогда

$$a^4 - 348a = (2a + 85)^2 - 348a = 4a^2 + 340a + 7225 - 348a = 4a^2 - 8a + 7225 =$$
$$= 4(2a + 85) - 8a + 7225 = 340 + 7225 = 7565$$

7. Найти наименьшее значение функции $f(x) = |x + 1| + 2|x|$

Ответ: 1.

При $x \in (-\infty, -1]$ $f(x) = -3x - 1$ и, следовательно, f убывает на $(-\infty, -1]$.

Если $x \in [-1, 0]$, то $f(x) = -x + 1$ и поэтому убывает на $[-1, 0]$.

При $x \in [0, +\infty)$ $f(x) = 3x + 1$ и значит f возрастает на $[0, +\infty)$.

Получили, что функция f убывает на $(-\infty, 0]$ и возрастает на $[0, +\infty)$. Значит наименьшее значение функция принимает при $x = 0$, которое равно 1.

8. В треугольник ABC вписана окружность. К окружности проведена касательная, пересекающая AB в точке K, BC в точке L. Найти периметр треугольника BKL, если $AB = 16$, $BC = 8$, $AC = 20$.

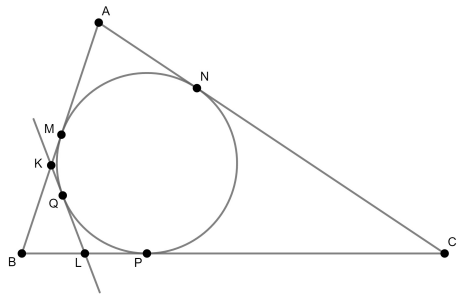
Ответ: 4.

Пусть M, N, P — точки касания окружности сторон AB, AC, BC соответственно. Q — точка касания касательной KL с окружностью. По свойству касательных к окружности справедливы равенства

$$KQ = KM, \quad LQ = LP, \quad BM = BP.$$

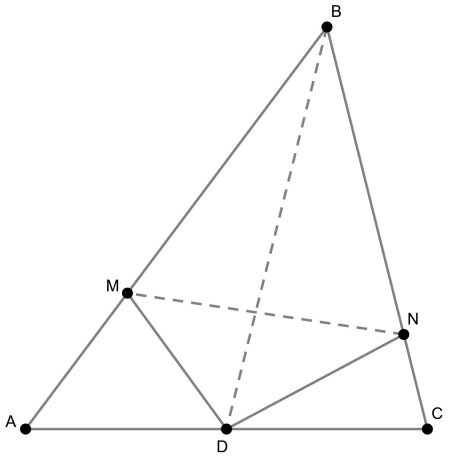
Тогда периметр p_{BKL} треугольника BKL равен

$$p_{BKL} = BK + KL + BL = BK + KQ + QL + BL = BK + KM + LP + LB = BM + BP = 2BM.$$



Пусть $BM = x$. Тогда $AM = 16 - x$, $CN = 20 - (16 - x) = x + 4$. Поэтому $CP = x + 4$. Так как $BP = x$, то $BC = 8 = BP + PC = x + x + 4 = 2x + 4$. Отсюда $x = 2$. Значит периметр треугольника BKL равен 4.

9. В остроугольном треугольнике ABC из точки D на стороне AC опущены перпендикуляры DM и DN на стороны AB и BC соответственно. Найти угол ABC, если $MN = 3$, $BD = 6$.
Ответ: 30^0.



Так как $\angle DMB = \angle DNB = 90^0$, то точки D, M, B, N Лежат на одной окружности, диаметром которой является BD. По теореме синусов имеем

$$\frac{MN}{\sin MBN} = 2R = BD.$$

Отсюда $\sin MBN = \frac{MN}{DB} = \frac{1}{2}$. Так как треугольник остроугольный, то угол B равен 30^0.

10. Найти все значения параметра a при каждом из которых уравнение
$(3x-1)^2 + (5a - a^2)|3x-1| + 25 - a^2 = 0$ имеет ровно один корень.
Ответ: $a = 5$. Обозначим $t = |3x - 1|$. Получаем систему

$$\begin{cases} |3x-1| = t, \\ t^2 + (5a - a^2)t + 25 - a^2 = 0. \end{cases}$$

Уравнение $|3x-1| = t$ имеет два корня при $t > 0$, не имеет корней при $t < 0$ и имеет один корень при $t = 0$. Поэтому число a будет удовлетворять условию задачи тогда и только тогда, когда уравнение

$$t^2 + (5a - a^2)t + 25 - a^2 = 0$$

либо имеет единственный корень $t = 0$, либо имеет два корня: один $t = 0$, а второй — отрицательный. Число $t = 0$ будет корнем, если $25 - a^2 = 0$, или $a = \pm 5$.

При $a = 5$ получаем уравнение $t^2 = 0$, имеющее один корень $t = 0$.

При $a = -5$ получаем уравнение $t^2 - 50t = 0$, корнями которого будут $t = 0$ и $t = 50$.

Следовательно, $a = -5$ не удовлетворяют условию задачи.

11. Целые числа x, y таковы, что число $3x + 7y$ делится на 19. Верно ли, что число $62x + 52y$ делится на 19?
Ответ: нет.

Пусть $x = 8$, $y = 2$. Тогда $3x + 7y = 38$ делится на 19. $62x + 52y = 600$ не делится на 19.

12. Какая дробь получится, если бесконечную десятичную дробь $0,6(27) = 0,627272727\ldots$ (период дроби равен 27) превратить в обыкновенную?

Ответ: $\frac{69}{110}$.

Обозначим $x = 0,627272727\ldots$, $y = 0,27272727\ldots$. Тогда $10x = 6 + y$, $100y = 27 + y$. Решая систему, получаем ответ.

Удмуртский государственный университет
Министерство цифрового развития УР
Институт математики, информационных технологий и физики
Уральский математический центр
Олимпиада по математике, 15 апреля 2023 года, 10 класс, вариант 2.

1. Вычислить $\frac{15^9 \cdot 25^7}{9^4 \cdot 5^{15}}$

2. Решить систему $\begin{cases} 3x - 4y = 5, \\ 5x + 6y = 7 \end{cases}$

3. Решить неравенство $\frac{3x}{x+2} \geqslant \frac{x+3}{2x+2}$.

4. Вкладчик положил в банк под p процентов годовых 15000 рублей. Через год он снял со своего счета 9000 рублей, а еще через год на счету у него оказалось 8250 рублей. Найти p.

5. Из пункта **A** в пункт **B** выехала грузовая машина. Одновременно навстречу ей из пункта **B** в пункт **A** выехала легковая машина. Через некоторое время они стретились и после этого грузовая машина ехала до **B** еще 25 часов, а легковая до **A** — еще 16 часов. Найти отношение скоростей.

6. Число a является корнем уравнения $x^2 - 2x - 65 = 0$. Вычислить $a^4 - 268a$.

7. Найти наименьшее значение функции $f(x) = |x - 1| + 2|x - 2|$

8. В треугольник ABC вписана окружность. К окружности проведена касательная, пересекающая AB в точке K, BC в точке L. Найти периметр треугольника BKL, если $AB = 10$, $BC = 8$, $AC = 12$.

9. В остроугольном треугольнике ABC из точки D на стороне AC опущены перпендикуляры DM и DN на стороны AB и BC соответственно. Найти угол ABC, если $MN = 3\sqrt{2}$, $BD = 6$.

10. Найти все значения параметра a при каждом из которых уравнение
$(2x - 1)^2 + (4a - a^2)|2x - 1| + 16 - a^2 = 0$ имеет ровно один корень.

11. Целые числа x, y таковы, что число $5x + 4y$ делится на 23. Верно ли, что число $106x + 71y$ делится на 23?

Ответ: да.

Имеем $106x + 71y = 12(5x + 4y) + 23(2x + y)$. Справа каждое слагаемое делится на 23. Значит сумма делится на 23.

12. Какая дробь получится, если бесконечную десятичную дробь $0,3(37) = 0,337373737\ldots$ (период дроби равен 37) превратить в обыкновенную?

Удмуртский государственный университет
Министерство цифрового развития УР
Институт математики, информационных технологий и физики
Уральский математический центр
Олимпиада по математике, 15 апреля 2023 года, 10 класс, вариант 3.

1. Вычислить $\frac{10^9 \cdot 25^7}{4^4 \cdot 5^{15}}$

2. Решить систему $\begin{cases} 3x + 4y = 5, \\ 5x - 6y = 7 \end{cases}$

3. Решить неравенство $\frac{3x}{x+2} \geqslant \frac{x+3}{4x}$.

4. Вкладчик положил в банк под p процентов годовых 12500 рублей. Через год он снял со своего счета 6875 рублей, а еще через год на счету у него оказалось 7980 рублей. Найти p.

5. Из пункта **A** в пункт **B** выехала грузовая машина. Одновременно навстречу ей из пункта **B** в пункт **A** выехала легковая машина. Через некоторое время они стретились и после этого грузовая машина ехала до **B** еще 16 часов, а легковая до **A** — еще 9 часов. Найти отношение скоростей.

6. Число a является корнем уравнения $x^2 - x - 125 = 0$. Вычислить $a^4 - 251a$.

7. Найти наименьшее значение функции $f(x) = |x| + 2|x - 1|$

8. В треугольник ABC вписана окружность. К окружности проведена касательная, пересекающая AB в точке K, BC в точке L. Найти периметр треугольника BKL, если $AB = 16$, $BC = 14$, $AC = 12$.

9. В остроугольном треугольнике ABC из точки D на стороне AC опущены перпендикуляры DM и DN на стороны AB и BC соответственно. Найти угол ABC, если $MN = 3\sqrt{3}$, $BD = 6$.

10. Найти все значения параметра a при каждом из которых уравнение
$(x - 1)^2 + (2a - a^2)|x - 1| + 4 - a^2 = 0$ имеет ровно один корень.

11. Целые числа x, y таковы, что число $7x + 8y$ делится на 13. Верно ли, что число $108x + 46y$ делится на 13?

12. Какая дробь получится, если бесконечную десятичную дробь $0,4(21) = 0,421212121\ldots$ (период дроби равен 21) превратить в обыкновенную?

Удмуртский государственный университет
Министерство цифрового развития УР
Институт математики, информационных технологий и физики
Уральский математический центр
Олимпиада по математике, 15 апреля 2023 года, 10 класс, вариант 4.

1. Вычислить $\frac{35^9 \cdot 49^7}{25^4 \cdot 7^{15}}$

2. Решить систему $\begin{cases} 3x - 4y = 5, \\ 5x - 6y = 7 \end{cases}$

3. Решить неравенство $\frac{2x}{x+1} \geqslant \frac{2x-1}{x}$.

4. Вкладчик положил в банк под p процентов годовых 15000 рублей. Через год он снял со своего счета 8250 рублей, а еще через год на счету у него оказалось 9075 рублей. Найти p.

5. Из пункта **A** в пункт **B** выехала грузовая машина. Одновременно навстречу ей из пункта **B** в пункт **A** выехала легковая машина. Через некоторое время они стретились и после этого грузовая машина ехала до **B** еще 9 часов, а легковая до **A** — еще 4 часа. Найти отношение скоростей.

6. Число a является корнем уравнения $x^2 - x - 135 = 0$. Вычислить $a^4 - 271a$.

7. Найти наименьшее значение функции $f(x) = |x + 2| + 2|x + 1|$

8. В треугольник ABC вписана окружность. К окружности проведена касательная, пересекающая AB в точке K, BC в точке L. Найти периметр треугольника BKL, если $AB = 6$, $BC = 8$, $AC = 12$.

9. В остроугольном треугольнике ABC из точки D на стороне AC опущены перпендикуляры DM и DN на стороны AB и BC соответственно. Найти угол ABC, если $MN = 4$, $BD = 8$.

10. Найти все значения параметра a при каждом из которых уравнение
$(x + 1)^2 + (3a - a^2)|x + 1| + 9 - a^2 = 0$ имеет ровно один корень.

11. Целые числа x, y таковы, что число $15x + 11y$ делится на 17. Верно ли, что число $3x + 111y$ делится на 17?

12. Какая дробь получится, если бесконечную десятичную дробь $0,2(29) = 0,229292929\ldots$ (период дроби равен 29) превратить в обыкновенную?

Удмуртский государственный университет
Министерство цифрового развития УР
Институт математики, информационных технологий и физики
Уральский математический центр
Олимпиада по математике, 15 апреля 2023 года, 9 класс, вариант 1.

1. Вычислить $\frac{6^8 \cdot 15^9}{9^8 \cdot 96 \cdot 10^9}$

2. Решить неравенство $\frac{x^2-7x+10}{4x-x^2} \geqslant 0$

3. Построить график функции $y = \frac{x-1}{|x-1|} + \frac{x-2}{|x-2|}$

4. Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 90 км/ч, проезжает мимо пешехода, идущего параллельно путям со скоростью 3,6 км/ч навстречу поезду, за 10 секунд. Найдите длину поезда в метрах

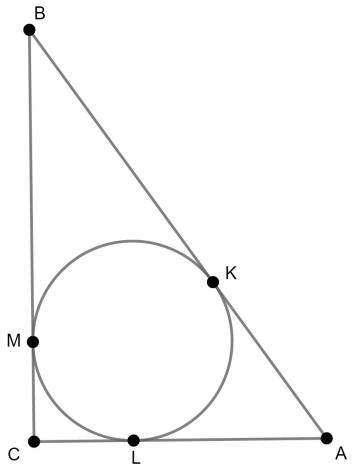
Ответ: 260 метров. Представим скорости в метрах в секунду. Тогда скорость поезда 25 метров с секунду, скорость пешехода — 1 метр в секунду. Пусть длина поезда l. Задачу можно переформулировать так. Два тела, находящиеся на расстоянии l друг от друга, движутся навстречу другу другу со скоростями v_1, v_2 и встречаются через время t. Найти l. Получаем $l = (v_1 + v_2)t$.

5. В прямоугольном треугольнике точка касания вписанной окружности делит гипотенузу на отрезки длиной 5 и 12. Найти катеты треугольника.

Ответ: 8 и 15. Пусть $AK = 5$, $BK = 12$. Тогда $AL = 5$, $BM = 12$ по свойству касательных к окружности. Обозначим $CL = CM = x$. Тогда $AC = 5 + x$, $CB = 12 + x$ и по теореме Пифагора получим

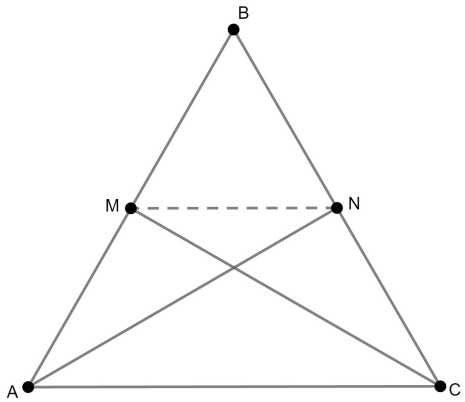
$$(x+5)^2 + (x+12)^2 = 17^2,$$

откуда $x = 3$. Значит катеты равны 8 и 15.



6. В равнобедренном треугольнике ABC, $AB = BC = 4$, $AC = 6$ проведены биссектрисы AN, CM. Найти длину NM.

Ответ: $NM = \frac{12}{5}$.



По свойству биссектрисы имеем $\frac{BN}{NC} = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{6}$. Кроме того, $BN + NC = 4$. Отсюда $BN = \frac{8}{5}$. Треугольники

BNM и ABC подобны. Поэтому

$$\frac{NM}{AC} = \frac{BN}{BC}, \text{ или } \frac{NM}{6} = \frac{\frac{8}{5}}{4}$$

Значит $NM = \frac{12}{5}$.

7. Какая дробь получится, если бесконечную десятичную дробь $0,6(23) = 0,623232323\ldots$ (период дроби равен $0,23$) превратить в обыкновенную?

Ответ: $\frac{617}{990}$ Обозначим $x = 0,623232323\ldots$, $y = 0,232323\ldots$. Тогда $10x = 6 + y$. Кроме того, $100y = 23 + y$. Значит $y = \frac{23}{99}$, $10x = 6 + \frac{23}{99} = \frac{617}{99}$. Следовательно, $x = \frac{617}{990}$.

8. Найти все значения параметра a, при каждом из которых сумма квадратов корней уравнения $x^2 - 3ax + a^2 = 0$ равна 0,28.

Ответ: $a = \pm 0,2$. Дискриминат уравнения равен $9a^2 - 4a^2 = 5a^2 \geqslant 0$ и поэтому уравнение при любом a имеет корни x_1, x_2. По теореме Виета $x_1 + x_2 = 3a$, $x_1x_2 = a^2$. Тогда

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 9a^2 - 2a^2 = 7a^2.$$

Получаем уравнение $7a^2 = 0,28$, откуда $a = \pm 0,2$.

9. Найти все целые числа n, для каждого из которых число $\frac{n^2+1}{n+2}$ является целым.

Ответ: $n \in \{-7, -1, 0, 3\}$. Представим дробь $\frac{n^2+1}{n+2}$ в виде

$$\frac{n^2+1}{n+2} = \frac{(n^4-4)+5}{n+2} = n - 2 + \frac{5}{n+2}$$

Так как n целое число, то дробь будет целым числом тогда и только тогда, когда дробь $\frac{5}{n+2}$ является целым числом. Так как числитель и знаменатель – целые число, то это возможно только, если 5 делится на $n+2$. Получаем, что $n+2$ может равняться $\pm 1, \pm 5$, откуда следует ответ.

10. Средний возраст группы из врачей и больных равен 45 лет. Средний возраст отдельно врачей 40 лет, а средний возраст отдельно больных 60 лет. Кого больше: врачей или больных? И во сколько раз?

Ответ: врачей больше в 3 раза. Пусть врачей x, больных y. Тогда возраст всех будет $45(x+y)$. С другой стороны, возраст врачей $30x$, возраст больных $60y$. Получаем уравнение

$$45(x+y) = 40x + 60y,$$

откуда $5x = 15y$ или $x = 3y$. Значит врачей больше в 3 раза

Удмуртский государственный университет
Министерство цифрового развития УР
Институт математики, информационных технологий и физики
Уральский математический центр
Олимпиада по математике, 15 апреля 2023 года, 9 класс, вариант 2.

1. Вычислить $\frac{6^9 \cdot 15^8}{9^8 \cdot 48 \cdot 10^7}$

2. Решить неравенство $\frac{x^2+7x+10}{9x-x^2} \geqslant 0$

3. Построить график функции $y = \frac{x+1}{|x+1|} + \frac{x+2}{|x+2|}$

4. Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 75 км/ч, проезжает мимо пешехода, идущего параллельно путям со скоростью 3 км/ч навстречу поезду, за 30 секунд. Найдите длину поезда в метрах

5. В прямоугольном треугольнике точка касания вписанной окружности делит гипотенузу на отрезки длиной 10 и 15. Найти катеты треугольника.

6. В равнобедренном треугольнике ABC, $AB = BC = 6$, $AC = 4$ проведены биссектрисы AN, CM. Найти длину NM.

7. Какая дробь получится, если бесконечную десятичную дробь $0,3(31) = 0,531313131\ldots$ (период дроби равен $0,31$) превратить в обыкновенную?

8. Найти все значения параметра a, при каждом из которых сумма квадратов корней уравнения $x^2-3ax+2a^2 = 0$ равна 0,8.

9. Найти все целые числа n, для каждого из которых число $\frac{n^2+2}{n+3}$ является целым.

10. Средний возраст группы из врачей и больных равен 40 лет. Средний возраст отдельно врачей 35 лет, а средний возраст отдельно больных 50 лет. Кого больше: врачей или больных? И во сколько раз?

Удмуртский государственный университет
Министерство цифрового развития УР
Институт математики, информационных технологий и физики
Уральский математический центр
Олимпиада по математике, 15 апреля 2023 года, 8 класс, вариант 1
Решение задач

1. Расставьте знаки модуля так, чтобы получилось верное равенство

$$4 - 5 - 7 - 11 - 19 = 22$$

Решение. Например, $||4 - 5| - |7 - 11 - 19|| = 22$

2. Решить уравнение $\frac{2x+1}{x-6} = \frac{5+3x}{x-6}$.
Ответ. $x = -4$.

3. Представить число 294 в виде суммы 4 натуральных чисел таких что, если одно из них умножить на 6, второе разделить на 6, к третьему прибавить 6, а из четвёртого вычесть 6, то получится одно и то же натуральное число.
Ответ. $294 = 6 + 216 + 42 + 30$.

4. Чебурашка бежит с скоростью $\frac{3}{5}$ км/мин, а Гена – $\frac{2}{3}$км/мин. Они выбежали одновременно. Какую часть дистанции останется пробежать Чебурашке, когда Гена финиширует?
Решение. $\frac{1}{10}$. ИДЕЯ: Пусть S — длина пути. Гена закончит дистанцию через $\frac{S}{2/3} = t$. За это время Чебурашка пробежит $\frac{3}{5} \cdot \frac{S}{2/3} = \frac{9S}{10.}$ Значит, ему останется пробежать $\frac{S}{10}$.

5. За круглым столом сидят 10 человек, каждый из которых либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжет. Двое из них заявили: "Оба моих соседа – лжецы а остальные восемь заявили: "Оба моих соседа – рыцари". Сколько рыцарей могло быть среди этих 10 человек? (Перечислите все варианты и докажите, что других нет.)
Ответ. 1 или 2.

6. Определить площадь равнобокой трапеции, высота которой 10 и диагонали трапеции взаимно перпендикулярны.
Ответ. 100. ИДЕЯ: если проведем высоту через точку пересечения диагоналей, то в силу того, что полученные треугольники все равнобедренные и прямоугольные, получаем, что полусумма оснований будет также равна 10.

7. Какое точное время показывают часы между 18.00 и 19.00, в то время как их минутные и часовые стрелки совпадут?

8. Представить число 2025 как сумму пяти натуральных чисел, в записи которых участвуют все десять цифр, в каждом из чисел цифры не повторяются, и в записи любых двух чисел нет одинаковых цифр.
Ответ. $2025 = 1920 + 54 + 36 + 7 + 8$.

Удмуртский государственный университет
Министерство цифрового развития УР
Институт математики, информационных технологий и физики
Уральский математический центр
Олимпиада по математике, 15 апреля 2023 года, 8 класс, вариант 2
Решение задач

1. Расставьте знаки модуля так, чтобы получилось верное равенство

$$3 - 4 - 7 - 10 - 14 = 16$$

Решение. Например, $||3 - 4| - |7 - 10 - 14|| = 16$.

2. Решить уравнение $\frac{3x-7}{x-4} = \frac{3+2x}{x-4}$.
Ответ. $x = -10$.

3. Представить число 448 в виде суммы 4 натуральных чисел таких что, если одно из них умножить на 7, второе разделить на 7, к третьему прибавить 7, а из четвёртого вычесть 7, то получится одно и то же натуральное число.
Ответ. $448 = 7 + 343 + 56 + 42$.

4. Чебурашка бежит с скоростью $\frac{1}{3}$ км/мин., а Гена — $\frac{1}{2}$ км/мин. Они выбежали одновременно. Какую часть дистанции останется пробежать Чебурашке, когда Гена финиширует?

Ответ. $\frac{1}{3}$ ИДЕЯ: Пусть S — длина пути. Гена закончит дистанцию через $\frac{S}{1/2} = t$. За это время Чебурашка пробежит $\frac{1}{3} \cdot \frac{S}{1/2} = \frac{2S}{3}$. Значит, ему останется пробежать $\frac{S}{3}$.

5. За круглым столом сидят 8 человек, каждый из которых либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжет. Двое из них заявили: "Оба моих соседа — лжецы а остальные шестеро заявили: "Оба моих соседа — рыцари". Сколько рыцарей могло быть среди этих 8 человек? (Перечислите все варианты и докажите, что других нет.)

Ответ. 1 или 2.

6. Определить площадь равнобокой трапеции, высота которой 8 и диагонали трапеции взаимно перпендикулярны.

Ответ 64. ИДЕЯ: если проведем высоту через точку пересечения диагоналей, то в силу того, что полученные треугольники все равнобедренные и прямоугольные, получаем, что полусумма оснований будет также равна 8.

7. Какое точное время показывают часы между 9.00 и 10.00, в то время как их минутные и часовые стрелки совпадут?

8. Представить число 2034 как сумму пяти натуральных чисел, в записи которых участвуют все десять цифр, в каждом из чисел цифры не повторяются, и в записи любых двух чисел нет одинаковых цифр.

Ответ. $2034 = 1920 + 56 + 47 + 8 + 3$.

Удмуртский государственный университет
Министерство цифрового развития УР
Институт математики, информационных технологий и физики
Уральский математический центр
Олимпиада по математике, 15 апреля 2023 года, 7 класс, вариант 1.

1. Какое число больше: 15% от $\frac{3}{4}$ положительного числа A, или 18% от $\frac{3}{5}$ положительного числа A?
Ответ: 15% от $\frac{3}{4}$
Первое число равно $\frac{15}{100} \cdot \frac{75}{100} A = \frac{1125}{10000} A$. Второе число равно $\frac{18}{100} \cdot \frac{60}{100} A = \frac{1080}{10000} A$.

2. Решить уравнение $\frac{x-5}{x-6} = \frac{5-x}{x-2}$.
Ответ. $x = 4$ и $x = 5$.

3. Семь последовательных натуральных чисел написаны в ряд. Сумма четырёх самых маленьких из них равна 62. Чему равна сумма четырёх самых больших?
Ответ. 74. **Решение 1.** Пятое число на 4 больше первого, шестое — на 4 больше второго, седьмое — на 4 больше третьего. Тогда сумма четырёх самых больших чисел на $4 + 4 + 4 = 12$ больше суммы четырёх самых маленьких, и эта сумма четырёх самых больших равна $62 + 12 = 74$.
Решение 2. Четыре последовательных натуральных числа можно разбить на пары с одинаковой суммой: первое и четвёртое число, второе и третье число. Значит, сумма каждой из двух пар равна 31. Каждое число второй четвёрки (в порядке очередности в четвёрке) больше соответствующего числа наименьшей четвёрки на 3, т.е. четвертое число больше первого на 3, пятое число больше второго на 3, и т.д. Значит, сумма пары во второй (наибольшей) четвёрке на 6 больше суммы пары в наименьшей четвёрке. Отсюда сумма наибольших четырёх будет равна $62 + 12 = 74$.

4. Из пункта A в пункт B выехал велосипедист. Через некоторое время навстречу ему из B в A выехал второй велосипедист. Они встретились в пункте C, который расположен на одной трети пути AB от пункта A. Приехав в A, второй велосипедист тут же повернул обратно, но первого велосипедиста он догнал только в B. Во сколько раз скорость второго велосипедиста превышает скорость первого?
Ответ. в 2 раза. Решение. Обозначим через S расстояние между пунктами A и B. Тогда между первой и второй встречами второй велосипедист проехал в 2 раза ($\frac{4S}{3}$) большее расстояние, чем первый ($\frac{2S}{3}$). Значит, его скорость в два раза больше.

5. Сумма пяти чисел равна 10000. Может ли их произведение оканчиваться на 2017?
Ответ. нет, так как сумма пяти чисел — чётна, значит, одно из слагаемых чётно. Отсюда произведение должно быть чётным.

6. Можно ли расставить числа от 1 до 10 в ряд так, чтобы сумма любых двух соседних чисел была бы простым числом?
Ответ. да, например, 1, 2, 3, 4, 7, 6, 5, 8, 9, 10

7. В треугольнике ABC на стороне BC отмечена точка M, а на стороне AC - точка N. Известно, что $MC = MN = BN = AN$ $\angle C = 40^0$. Найдите $\angle A$.
Ответ. 30^0.

Удмуртский государственный университет
Министерство цифрового развития УР
Институт математики, информационных технологий и физики
Уральский математический центр
Олимпиада по математике, 15 апреля 2023 года, 7 класс, вариант 2.

1. Какое число больше: 25% от $\frac{3}{4}$ числа A, или 28% от $\frac{3}{5}$ числа A?
Ответ 25% от $\frac{3}{4}$ числа A больше.
Первое число равно $\frac{25}{100} \cdot 75100 = \frac{1875}{10000}$ Второе число равно $\frac{28}{100} \cdot \frac{60}{100} = \frac{1680}{10000}$.

2. Решить уравнение $\frac{x-7}{x-4} = \frac{7-x}{x-6}$.
Ответ. $x = 5$ и $x = 7$.

3. Семь последовательных натуральных чисел написаны в ряд. Сумма четырёх самых маленьких из них равна 86. Чему равна сумма четырёх самых больших?
Ответ 98.

4. Из пункта A в пункт B выехал первый велосипедист. Через некоторое время навстречу ему из B в A выехал второй велосипедист. Они встретились в пункте C, который расположен на расстоянии 3/7 пути AB от пункта A.

Приехав в A, второй велосипедист тут же повернул обратно, но первого велосипедиста он догнал только в пункте B. Найти отношение скорости второго велосипедиста к скорости первого.

Ответ. $5:2$.

5. Сумма шести чисел равна 10001. Может ли их произведение оканчиваться на 2023?

Ответ. нет, так как сумма шести чисел нечётна, значит, по крайней мере, одно из слагаемых чётно. Отсюда произведение должно быть чётным.

6. Можно ли расставить числа от 1 до 10 по кругу так, чтобы все разности любых двух соседних чисел (из большего числа вычитается меньшее) были бы простыми числами?

Ответ. Да, например, 10, 5, 3, 1, 4, 2, 7, 9, 6, 8.

7. В треугольнике PQR на стороне PQ отмечена точка A, а на стороне PR — точка B. Известно, что $AP = AB = BQ = BR$ и $\angle P = 20^0$. Найдите $\angle R$.

Ответ. 60^0.