Удмуртский государственный университет
Институт математики, информационных технологий и физики
Уральский математический центр
Олимпиада по математике, 11 марта 2023 года, 1 вариант

1. Вычислить $18^{-1,25} \cdot 4^{-\frac{3}{8}} \cdot 81^{\frac{5}{8}}$.

2. Решить систему $\begin{cases} 9x + 5y = 16, \\ 5x - 9y = 11. \end{cases}$

3. Решить неравенство $\frac{2}{2x-1} > \frac{1}{x-3}$.

4. Слух о том, что на акции компании $XYZW$ будут выплачены сверхдивиденды привел к тому, что стоимость каждой акции увеличилась на 400%. Когда слухи не подтвердились, стоимость каждой акции стала равна половине ее первоначальной стоимости. На сколько процентов снизилась стоимость каждой акции после опровержения слухов?

Ответ: 90%. Пусть первоначальная цена акции x. После повышения цены на 400% акция стала стоить $5x$. После понижения цена стала $\frac{x}{2}$. Следовательно, стоимость акции уменьшилась на сумму, равную $5x - \frac{x}{2} = \frac{9x}{2}$, что составляет 90% от $5x$. Значит цена акции уменьшилась на 90%.

5. Решить уравнение $\sin 2x \cdot \sin 4x - \cos 2x = 0$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$; $x = (-1)^n \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$; $x = (-1)^l \cdot \left(-\frac{\pi}{8}\right) + \frac{\pi l}{2}$, $k, n, l \in Z$.

Так как $\sin 4x = 2 \sin 2x \cos 2x$, то получаем уравнение

$$2\sin^2 2x \cos 2x - \cos 2x = 0, \text{ или } \cos 2x(2\sin^2 2x - 1) = 0.$$

Отсюда

а) $\cos 2x = 0$, $2x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$.

б) $2\sin^2 2x = 1$, значит $\sin 2x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

б1) $\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $2x = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n$, $x(-1)^n \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$.

б2) $\sin 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $2x = (-1)^l \left(-\frac{\pi}{4}\right) + \pi l$, $x = (-1)^l \left(-\frac{\pi}{8}\right) + \frac{\pi l}{2}$.

6. Решить неравенство $\log_3(x+4) + \frac{1}{\log_{(x-1)} 3} \geqslant 1 + \log_3 2$.

Ответ: $(2; +\infty)$. ОДЗ неравенства — $(1; 2) \cup (2; +\infty)$. По свойству логарифмов неравенство представимо в виде

$$\log_3(x+4) + \log_3(x-1) \geqslant \log_3 3 + \log_3 2, \quad \text{или}$$
$$\log_3\Big((x+4)(x-1)\Big) \geqslant \log_3 6.$$

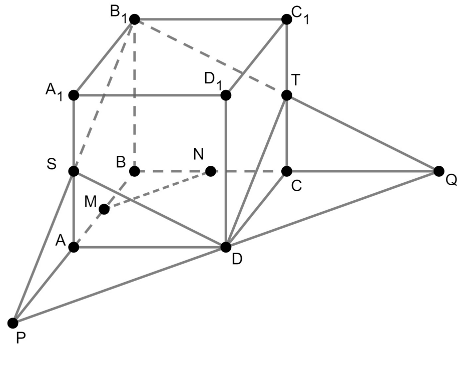
Так как функция $\log_3 t$ возрастающая, то получаем неравенство

$$(x+4)(x-1) \geqslant 6, \quad \text{или} \quad x^2 + 3x - 10 \geqslant 0.$$

Решением последнего неравенства будет $(-\infty; -5] \cup [2; +\infty)$. Учитывая ОДЗ, получаем ответ.

7. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб с ребром 6. Точка M — середина AB, точка N — середина BC. Найти площадь сечения куба плоскостью, проходящей через точки D, B_1 и параллельной MN.

Ответ: $18\sqrt{6}$.



Проведем через точку D прямую l, параллельную MN. Тогда плоскость α, проходящая через l и точку B_1 будет искомой. Пусть P — точка пересечения плоскости α с прямой AB, Q — точка пересечения плоскости α с прямой BC.

Обозначим через S — точку пересечения PB_1 с ребром AA_1, а через T — точку пересечения B_1Q с ребром CC_1. Тогда четырехугольник SB_1TD искомое сечение. Из подобия треугольников MBN и PBQ следует $\frac{BM}{PB} = \frac{BN}{BQ}$. Так как $BM = BN$, то $PB = BQ$. Значит $AP = CQ$. Поэтому $AS = TC$. Значит ST параллельно AC. Так как диагонали квадрата перпендикулярны, то по теореме о трех перпендикулярах получаем, что B_1D перепендикулярно AC и, следовательно, ST.

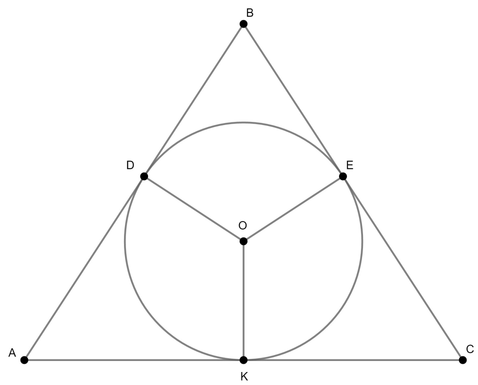
Поэтому площадь сечения равна $\frac{1}{2}ST \cdot B_1D = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{3} = 18\sqrt{6}$.

8. В треугольнике ABC, $AB = 16$, $BC = 12$. O — центр вписанной окружности, K — точка касания вписанной окружности со стороной AB. Известно, что площади треугольников BOC и AOK равны. Найти третью сторону.

Ответ: 20.

Так как $OK \perp AC$, $OE \perp BC$ и $OE = OK$, то из равенства $S_{AOK} = S_{BOC}$ следует, что $AK = BC = 12$. Поэтому $AD = 12$. Значит $BD = BE = 4$. Отсюда $EC = KC = 8$.

Получаем $AC = AK + KC = 20$.



9. Квадратичная функция $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a > 0$ такова, что $f(-2) = f(8)$. В какой точке функция f принимает наименьшее значение.

Ответ: $x = 3$. Так как $a > 0$, то квадратичная функция $f(x)$ принимает свое наименьшее значение в точке x_0, являющейся абсциссой вершины параболы. Парабола симметрична относительно прямой $x = x_0$. Так как $f(-2) = f(8)$, то $x_0 = \frac{-2+8}{2} = 3$.

10. Найти уравнение такой касательной к графику функции $f(x) = x^3 + 4x$, для которой существует параллельная или совпадающая касательная к графику функции $g(x) = \cos 4x$.

Ответ: $y = 4x$. Пусть x_1 — абсцисса точки касания касательной с графиком функции $f(x)$, x_2 — точка касания касательной с графиком функции $g(x)$. Так касательные параллельны или совпадают, то выполняется равенство

$$f'(x_1) = g'(x_2).$$

Получаем

$$3x_1^2 + 4 = -4 \sin x_2. \tag{1}$$

Так как $\sin x_2 \in [-1; 1]$, то $-4 \sin x_2 \in [-4; 4]$, а $3x_1^2 + 4 \geqslant 4$. Поэтому равенство (**??**) справедливо тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} 3x_1^2 + 4 = 4, \\ -4 \sin x_2 = 4. \end{cases}$$

Отсюда $x_1 = 0$. Уравнение касательной имеет вид $y = f(x_1) + f'(x_1)(x - 0)$. Получаем $y = 4x$.

11. При каких a неравенство $27^x - 9^x + a \geqslant 8 \cdot 3^x$ справедливо для всех $x \leqslant 2$.

Ответ: $a \in [12; +\infty)$. Обозначим $t = 3^x$. Получаем задачу. Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$t^3 - t^2 + a \geqslant 8t$$

справедливо для всех $t \in (0; 9]$. Рассмотрим функцию $f(t) = -t^3 + t^2 + 8t$. Тогда ответом будут все a, при каждом из которых $a \geqslant f_{max}$, где f_{max} — наибольшее значение функции f на $(0; 9]$. Имеем $f'(t) = -3t^2 + 2t + 8$. Корнями производной будут $t_1 = -\frac{4}{3}$, $t_2 = 2$. Поэтому функция f возрастает на $(0; 2]$ и убывает на $[2; 9]$. Значит $f_{max} = f(2) = 12$.

12. На предприятии доля мужчин среди работников составляла 56%. По сокращению штата было уволено 30 человек, в том числе 18 мужчин. После этого доля мужчин среди работников стала равна q%. Найдите все возможные целые значения q.

Ответ: $q \in \{50; 55\}$. Пусть на предприятии было n работников. Тогда мужчин было $0,56n$. После сокращения работников стало $n-30$, а мужчин $0,56n-18$. Поэтому $n > 30$ и $0,56n = \frac{14n}{25}$ является целым числом. Значит n делится на 25.

Процент мужчин после сокращения стал равен $q = \frac{0,56n-18}{n-30} \cdot 100$. Представим q в виде

$$q = 56 - \frac{120}{n-30}.$$

Число q будет целым тогда и только тогда, когда целым будет число $\frac{120}{n-30}$. Так как n — натуральное число, большее 30, то дробь $\frac{120}{n-30}$ будет натуральным числом тогда и только тогда, когда 120 делится на $n-30$. Поэтому $n-30 \leqslant 120$, откуда $n \leqslant 150$.

В силу ранее сказанного, получаем, что для n возможны следующие значения $n \in \{50, 75, 100, 125, 150\}$.

Условию задачи удовлетворяют только $n = 50$ и $n = 150$. Тогда $q = 50$ или $q = 55$.

Удмуртский государственный университет
Институт математики, информационных технологий и физики
Уральский математический центр
Олимпиада по математике, 11 марта 2023 года, вариант 2.

1. Вычислить $14^{-1,25} \cdot 4^{-\frac{3}{8}} \cdot 49^{\frac{5}{8}}$.

2. Решить систему $\begin{cases} 6x + 5y = 17, \\ 5x - 6y = 11. \end{cases}$

3. Решить неравенство $\frac{1}{2x+3} > \frac{1}{2-3x}$.

4. Слух о том, что на акции компании $XYZW$ будут выплачены сверхдивиденды привел к тому, что стоимость каждой акции увеличилась на 150%. Когда слухи не подтвердились, стоимость каждой акции стала равна четверти ее первоначальной стоимости. На сколько процентов снизилась стоимость каждой акции после опровержения слухов?

5. Решить уравнение $\sin 2x \cdot \sin x + \cos x = 0$.

6. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{6}}(5x-4) + \frac{1}{\log_{(x-1)} \frac{1}{6}} \geqslant -1$.

7. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб с ребром 8. Точка M — середина CD, точка N — середина BC. Найти площадь сечения куба плоскостью, проходящей через точки A, C_1 и параллельной MN.

8. В треугольнике ABC, $AB = 22$, $AC = 26$. O — центр вписанной окружности, K — точка касания вписанной окружности со стороной AB. Известно, что площади треугольников BOC и AOK равны. Найти третью сторону.

9. Квадратичная функция $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a < 0$ такова, что $f(-4) = f(10)$. В какой точке функция f принимает наибольшее значение.

10. Найти уравнение такой касательной к графику функции $f(x) = x^3 + 6x$, для которой существует параллельная или совпадающая касательная к графику функции $g(x) = \cos 6x$.

11. При каких a неравенство $64^x - 16^x + a \geqslant 8 \cdot 4^x$ справедливо для всех $x \leqslant 1$.

12. В фирме работало 200 сотрудников, в том числе 93 женщины. Затем произошло объединение с другой фирмой, где женщины составляли 40%. В результате доля женщин среди сотрудников стала равна p%. Найдите все возможные целые значения p.

Удмуртский государственный университет
Институт математики, информационных технологий и физики
Уральский математический центр
Олимпиада по математике, 11 марта 2023 года, вариант 3.

1. Вычислить $10^{-1{,}25} \cdot 4^{-\frac{3}{8}} \cdot 25^{\frac{5}{8}}$.

2. Решить систему $\begin{cases} 3x + 5y = 12, \\ 5x - 3y = 11. \end{cases}$

3. Решить неравенство $\frac{5}{2-x} > \frac{3}{x+2}$.

4. Слух о том, что на акции компании $XYZW$ будут выплачены сверхдивиденды привел к тому, что стоимость каждой акции увеличилась на 900%. Когда слухи не подтвердились, стоимость каждой акции стала равна половине ее первоначальной стоимости. На сколько процентов снизилась стоимость каждой акции после опровержения слухов?

5. Решить уравнение $\sin 3x \cdot \cos x = \sin 4x$.

6. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) + 1 \leqslant \frac{2}{\log_x \frac{1}{2}}$.

7. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб с ребром 4. Точка M — середина AB, точка N — середина BC. Найти площадь сечения куба плоскостью, проходящей через точки D, B_1 и параллельной MN.

8. В треугольнике ABC, $AB = 16$, $BC = 8$. O — центр вписанной окружности, K — точка касания вписанной окружности со стороной AB. Известно, что площади треугольников BOC и AOK равны. Найти третью сторону.

9. Квадратичная функция $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a > 0$ такова, что $f(-3) = f(11)$. В какой точке функция f принимает наименьшее значение.

10. Найти уравнение такой касательной к графику функции $f(x) = x^3 + 2x$, для которой существует параллельная или совпадающая касательная к графику функции $g(x) = \cos 2x$.

11. При каких a неравенство $8^x - 4^x + a \geqslant 21 \cdot 2^x$ справедливо для всех $x \leqslant 2$.

12. На предприятии доля мужчин среди работников составляла 48%. По сокращению штата было уволено 25 человек, в том числе 10 мужчин. После этого доля мужчин среди работников стала равна q%. Найдите все возможные целые значения q.

Удмуртский государственный университет
Институт математики, информационных технологий и физики
Уральский математический центр
Олимпиада по математике, 11 марта 2023 года, вариант 4.

1. Вычислить $6^{-1{,}25} \cdot 4^{-\frac{3}{8}} \cdot 9^{\frac{5}{8}}$.

2. Решить систему $\begin{cases} 7x + 5y = 13, \\ 5x - 7y = 11. \end{cases}$

3. Решить неравенство $\frac{2}{1-2x} > \frac{3}{x+5}$.

4. Слух о том, что на акции компании $XYZW$ будут выплачены сверхдивиденды привел к тому, что стоимость каждой акции увеличилась на 900%. Когда слухи не подтвердились, стоимость каждой акции стала равна ее первоначальной стоимости. На сколько процентов снизилась стоимость каждой акции после опровержения слухов?

5. Решить уравнение $\sin x \cdot \sin 3x = \cos 4x$.

6. Решить неравенство $\log_2 x + \frac{1}{\log_{(3x-5)} 2} \geqslant 1$.

7. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб с ребром 10. Точка M — середина CD, точка N — середина BC. Найти площадь сечения куба плоскостью, проходящей через точки A, C_1 и параллельной MN.

8. В треугольнике ABC, $AB = 12$, $AC = 16$. O — центр вписанной окружности, K — точка касания вписанной окружности со стороной AB. Известно, что площади треугольников BOC и AOK равны. Найти третью сторону.

9. Квадратичная функция $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a < 0$ такова, что $f(-5) = f(13)$. В какой точке функция f принимает наибольшее значение.

10. Найти уравнение такой касательной к графику функции $f(x) = x^3 + 7x$, для которой существует параллельная или совпадающая касательная к графику функции $g(x) = \cos 7x$.

11. При каких a неравенство $125^x - 25^x + a \geqslant 96 \cdot 5^x$ справедливо для всех $x \leqslant 2$.

12. В фирме работало 150 сотрудников, в том числе 73 женщины. Затем произошло объединение с другой фирмой, где женщины составляли 40%. В результате доля женщин среди сотрудников стала равна p%. Найдите все возможные целые значения p.