

ЗАОЧНАЯ ОЛИМПИАДА — 2023
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
1 КУРС ВСЕ НАПРАВЛЕНИЯ

1. Составьте алгоритм или блок-схему для вычисления пределов функции: а) с использованием замечательных пределов; б) в общем случае.

2. Найдите все значения параметра a , при котором функция

$$g(x) = 3x^5 + 35x^3 + 90ax + 17$$

возрастает на всей числовой прямой.

3. Пусть функция $f(x)$ определена на $[a, b]$. Как соотносятся (или связаны) между собой понятия: «непрерывная функция», «дифференцируемая функция», «ограниченная функция», «монотонная функция», «непрерывно-дифференцируемая функция», «интегрируемая функция». Ответ обоснуйте с помощью соответствующих утверждений или примеров из курса МА.

4. Можно ли менять местами кванторы в высказываниях? Обоснуйте и/или приведите примеры из курса МА, когда это можно делать, а в каких случаях — нельзя.

5. При каких α и β данная функция дифференцируема в каждой точке:

$$y = \begin{cases} \alpha - \beta x^2, & |x| \leq 1, \\ \frac{2}{|x| + 1}, & |x| > 1. \end{cases}$$

Будет ли при найденных α и β данная функция непрерывно-дифференцируемой?

6. Найдите наибольшее значение функции $f(x) = 5(2x - 6)^4 - (2x - 6)^5$ при $|x - 3| \leq 1$.

7. Найдите точные грани последовательности $\{x_n\}$, её минимальный и максимальный элементы, где

$$x_n = \sum_{k=1}^n \frac{4^{k-1}}{7^k}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

8. Исследуйте на непрерывность и постройте график функции

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3xe^{-nx}}{1 + e^{-nx}}.$$

9. Докажите тождество при $|x| \leq 1$

$$2 \operatorname{arctg} x + \arccos \frac{2x}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

10. Найдите множество значений функции:

$$f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{(x-2)^2}{x^2+4}}.$$

11. Последовательность вещественных чисел $\{x_n\}$ задана рекуррентным соотношением:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{7}{x_n} \right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Для любого начального значения x_1 исследуйте последовательность на сходимость и в случае сходимости найдите её предел.

12. Найдите длину кривой, построенной с помощью следующего итерационного процесса. За основу берется отрезок. Отрезок делится на три части, на средней её части

строится квадрат и стирается та его сторона, имеющую общую часть с отрезком, который делили. Получаем ломаную из пяти звеньев. Затем с каждым отрезком ломаной поступаем аналогично: делим на три части, на серединке достраиваем до квадрата, стирая ту его сторону, которая имеет общие точки с отрезком деления, и т.д.

13. Для функции $f(x)$ известны значения: $f(1) = 3$, $f(2) = 1$, $f(4) = 5$. Функцию интерполируют ломаной — сплайном первой степени (кусочно-линейной функцией). Запишите аналитическое выражение для ломаной (сплайна) и найдите производную построенной функции (сплайна) в каждой точке отрезка $[1, 4]$.

14. Постройте график функции, заданной в полярных координатах: $\rho = a(1 + \cos \varphi)$.

15. Найдите сумму:

$$\text{a)} 1 + \frac{3}{2} + \frac{5}{4} + \dots + \frac{2n-1}{2^{n-1}}; \quad \text{б)} \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}.$$

16. Докажите неравенство наибольшим количеством способов:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} < 1.$$

17. Берется квадрат с длиной стороны, равной единице. Каждая из сторон квадрата делится на три равные части, а весь квадрат, соответственно, на девять одинаковых квадратиков со стороной равной $1/3$. Из полученной фигуры вырезается центральный квадрат. Затем такой же процедуре подвергается каждый из 8 оставшихся квадратиков и т.д. Процесс продолжается неограниченно. Пересечение полученных на каждом шаге объединений оставшихся квадратов называется ковром Серпинского. Найдите площадь ковра Серпинского.

18. Постройте пример непрерывной функции, график которой не имеет касательной в каждой точке её области определения.

19. При каком значении параметра a парабола $y = ax^4$ касается кривой $y = \ln x$?

20. Найти производную сотового порядка от функции $y = x \sin^2 3x$.