Министерство цифрового развития УР
Удмуртский государственный университет, ИМИТиФ
Уральский математический центр
РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ I ВАРИАНТА

7 класс

Задача 6. Представить число 2025 как сумму пяти натуральных чисел, в записи которых участвуют все десять цифр, в каждом из чисел цифры не повторяются, и в записи любых двух чисел нет одинаковых цифр.

Решение. $2025 = 1920 + 54 + 36 + 7 + 8$.

Задача 7. Число 200 представили в виде суммы нескольких двузначных чисел, не делящихся на 10, и в каждом слагаемом поменяли цифры местами. Может ли сумма полученных чисел оказаться больше 800?

Решение. Можно, например, представляем число 200 в виде

$$19 + 19 + 19 + 19 + 19 + 19 + 19 + 19 + 19 + 18 + 11.$$

Сумма <обратных> равна $91 \times 8 + 81 + 11 > 800$.

Задача 8. По окружности в произвольном порядке расставлены цифры от 1 до 9 (каждая цифра ровно один раз). Начиная с любой цифры, по часовой стрелке прочитываем 3 значное число. Чему может равняться сумма этих 9 чисел?

Решение. 4995. Решение. Понятно, что эта сумма равна числу $45 \cdot 102 + 45 \cdot 10 + 45 = 4995$.

8 класс

Задача 2. Расставьте знаки модуля так, чтобы получилось верное равенство $3-4-7-10-14 = 16$

Решение. $\big||3-4| - |7-10-14|\big| = 16$

Задача 3. Дана сумма $60 + 80 = 140$. На сколько процентов надо увеличить второе слагаемое, чтобы сумма увеличилась на 60%.

Решение. Так как сумма должна увеличиться на 60%, то сумма должна быть 224. Следовательно, второе слагаемое должно быть 164. Поэтому, второе слагаемое надо увеличить на 105%.

Задача 4. За круглым столом сидят 10 человек, каждый из которых либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжет. Двое из них заявили: "Оба моих соседа – лжецы" , а остальные восемь заявили: "Оба моих соседа – рыцари". Сколько рыцарей могло быть среди этих 10 человек? (Перечислите все варианты и докажите, что других нет.)

Решение. Ответ: 1 или 2.

Задача 5. Можно ли число 20200 представить в виде суммы 99 натуральных чисел с одинаковыми суммами цифр

Решение. Нет. Если все 99 чисел имеют одну и ту же сумму цифр, то сумма этих 99 чисел делится на 3. Число 20200 на 3 не делится.

Задача 6. Определить площадь равнобокой трапеции, высота которой 8 и диагонали трапеции взаимно перпендикулярны.

Решение. 64. ИДЕЯ: если проведем высоту через точку пересечения диагоналей, то в силу того, что полученные треугольники все равнобедренные и прямоугольные, получаем, что полусумма оснований будет также равна 8.

Задача 7. В трапеции $ABCD$ основание AD в два раза больше основания BC. Через вершины B и C провели перпендикулярные к AB и CD соответственно прямые, которые пересекаются в точке M. Докажите, что $AM = DM$.

Решение. Пусть E – пересечение боковых сторон AB, CD. Так как $AD = 2BC$, то точки B, C – середины сторон AE, DE соответственно. Поэтому MC, MB — срединные перпендикуляры. Следовательно, точка M – центр окружности, описанной около треугольника ADE, откуда следует требуемое равенство.

Задача 8. Какое точное время показывают часы между 9.00 и 10.00 в то время как их минутные и часовые стрелки совпадут?

Ответ: $9\frac{9}{11}$.

Задача 9. Сколько натуральных чисел от 1 до 300 имеют сумму цифр, делящуюся на 5?

Решение. 59. Решение. Рассмотрим 10 подряд идущих чисел, начиная с числа, оканчивающегося нулём, и кончая числом, оканчивающимся девяткой. Суммы цифр этих чисел также представляют собой 10 последовательных чисел, поэтому среди них ровно два числа делятся на 5. Числа от 0 до 299 разбиваются на 30 таких десятков, следовательно, среди них 60 чисел имеют сумму цифр, кратную 5. Осталось заметить, что среди этих чисел есть 0, который не является натуральным числом

9 класс

Задача 2. Построить график функции $y = \frac{x^3-9x}{|x-3|}$.

Решение. Отметим, что $x^3 - 9x = x(x-3)(x+3)$. Поэтому нужно построить график функции вида

$$y = \begin{cases} -(x^2+3x), \text{ если } x < 3 \\ x^2+3x, \text{ если } x > 3 \end{cases}$$

Задача 3. Число x таково, что $2x - \frac{1}{x} = 5$. Чему равно число $16x^4 + \frac{1}{x^4}$?

Решение. Возведем равенство $2x - \frac{1}{x} = 5$ в квадрат. Получим

$$25 = 4x^2 - 2 \cdot 2x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 4x^2 - 4 + \frac{1}{x^2}.$$

Отсюда $4x^2 + \frac{1}{x^2} = 29$. Возведем последнее равенство в квадрат. Получим

$$841 = 16x^4 + 2 \cdot 4x^2 \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} = 16x^4 + 8 + \frac{1}{x^4}.$$

Следовательно, $16x^4 + \frac{1}{x^4} = 833$.

Задача 4. Сумма двух чисел 2021. На сколько уменьшится произведение этих чисел, если каждое из них уменьшить на 2.

Решение. Пусть первое число x, второе – y. Тогда, после уменьшения на 2 первое число будет $x-2$, второе – $y-2$. Произведение было – xy, стало – $(x-2)(y-2)$. Следовательно, оно уменьшилось на

$$xy - (x-2)(y-2) = xy - (xy - 2x - 2y + 4) = 2(x+y) - 4 = 2 \cdot 2021 - 4 = 2038.$$

Задача 6. Петя выписал на доску все положительные числа, на которые делится некоторое натуральное число N. Оказалось, что сумма двух наибольших выписанных чисел равна 6663. Найдите все такие N.

Решение. Возможны два случая.

1. N – четное число. Тогда его наибольшие делители будут – само N и $\frac{N}{2}$. Получаем

$$N + \frac{N}{2} = 6663.$$

Отсюда $N = 4442$.

2. N – нечетное число. Тогда все его делители будут нечетными числами. Но сумма двух нечетных чисел будет числом четным, а число 6663 число нечетное. Значит второй вариант невозможен.

Задача 8. В треугольнике ABC, $AB = BC$. Точка M на стороне BC такова, что $BM : MC = 1 : 4$. В каком отношении высота BH делит отрезок AM?

Решение. Ответим, что высота BH является биссектрисой угла B треугольнике ABM. Осталось воспользоваться свойством биссектисы угла.

Задача 9. Квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ с целыми p, q имеет два целых корня. Найти эти корни, если известно, что $p + q = 82$.

Решение. Пусть x_1, x_2 — корни уравнения. Тогда по теореме Виета имеем

$$x_1 + x_2 = -p$$
$$x_1 x_2 = q.$$

Вычитая из второго равенства первое, получаем $x_1x_2 - x_1 - x_2 = p + q$. Отсюда

$$(x_1 - 1)(x_2 - 1) = 83.$$

Так как число 83 является простым, то равенство возможно только, если

$$\begin{cases} x_1 - 1 = 1 \\ x_2 - 1 = 83, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_1 - 1 = -1 \\ x_2 - 1 = -83, \end{cases}$$

откуда получаем ответ.

Задача 9. При каких a, b уравнение $(ax - by - 4)^2 + (6x - y - 4)^2 + 4x^2 + y^2 = 4xy$ имеет решение?

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$(ax - by - 4)^2 + (6x - y - 4)^2 + 4x^2 + y^2 - 4xy = 0, \text{ или } (ax - by - 4)^2 + (6x - y - 4)^2 + (2x - y)^2 = 0.$$

Последнее равенство возможно тогда и только тогда, когда x, y, a, b удовлетворяют системе

$$\begin{cases} ax - by = 4 \\ 6x - y - 4 = 0 \\ 2x - y == 0 \end{cases}$$

Из последних двух уравнений системы находим $x = 1, y = 2$. Подставляя найденные значения в первое уравнение, получаем, что a, b — произвольные числа, удовлетворяющие условию $a - 2b = 4$.

Ответ: a, b – произвольные числа, удовлетворяющие условию $a - 2b = 4$.

10 класс

Задача 3. Вычислить $\left(\sqrt[3]{25} - \sqrt[3]{5} + 1\right)\left(\sqrt[3]{25} - 1\right)\left(\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{5} + 1\right)$.

Решение. Обозначим $a = \sqrt[3]{5}$, тогда $a^2\sqrt[3]{25}$. Получаем

$$(a^2 - a + 1)(a^2 - 1)(a^2 + a + 1) = (a^2 - a + 1)(a + 1)(a - 1)(a^2 + a + 1) = (a^3 + 1)(a^3 - 1) = 24.$$

Задача 4. У квадратного уравнения $2x^2 + 3bx + c = 0$ ровно один корень $x = -4$. Найти b.

Решение. По теореме Виета $x_1 + x_2 = -\frac{3b}{2}$. Отсюда $-8 = -\frac{3b}{2}$. Следовательно, $b = \frac{16}{3}$.

Задача 6. Найти множество значений функции $y = (x - 2)|x - 4|$ на отрезке $[2, \frac{9}{2}]$.

Решение. Функция представима в виде

$$y = \begin{cases} (x - 2)(4 - x) \text{ если } x \in [2, 4] \\ (x - 2)(x - 4) \text{ если } x \in [4, 4.5], \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -x^2 + 6x - 8 \text{ если } x \in [2, 4] \\ x^2 - 6x + 8 \text{ если } x \in [4, 4.5], \end{cases}$$

Парабола $y=-x^2+6x-8$ имеет вершину в точке $x=3\in[2,4]$. Так как $y(2)=0, y(3)=1, y(4)=0$, то множество значений функции на отрезке $[2,4]$ будет отрезок $[0,1]$.

Парабола $y=x^2-6x+8$ имеет вершину в точке $x=3\notin[4,4.5]$. Так как $y(4)=0$, $y(4,5)=1,25$, то множество значений функции на отрезке $[4,4.5]$ будет отрезок $[0,1.25]$. Поэтому множеством значений функции на отрезке $[2,4.5]$ будет отрезок $[0,1.25]$.

Задача 7. Внутри треугольника ABC, в котором $\angle C=72^0$, $\angle B=78^0$, взята точка M так, что треугольник CMB равносторонний. Найти угол MAB.

Решение. Отметим, что $\angle A=30^0$, $\angle MBA=18^0$. Проведем отружность с центром в точке M и радиусом MB. Тогда точка A будет лежать на данной окружности. Треугольник MBA равнобедренный, поэтому $\angle MAB=18^0$.

Задача 8. Положительное число округлили до ближайшего целого и получили число, которое на 28% больше исходного. Чему могло равняться исходное число.

Решение. Пусть первоначальное число x. Тогда число $1,28x$ является целым. Кроме того, так как округляют до ближайщего целого, то $1,28x-x=0,28x\leqslant 0,5$. Получаем $\frac{128}{100}x=n$, n – целое. Отсюда $x=\frac{25n}{32}$ и

$$\frac{28}{100}x=\frac{7}{25}x\leqslant\frac{1}{2},\quad \frac{7}{25}\cdot\frac{25n}{32}\leqslant\frac{1}{2}.$$

Поэтому $n\leqslant\frac{16}{7}$. Значит n равно 1 или 2. Если $n=1$, то $x=\frac{25}{32}$, а если $n=2$, то $x=\frac{25}{16}$.

Задача 9. При каких a неравенство $x^4-2ax^2+(a^2-4)\geqslant 0$ справедливо для всех x?

Решение. Сделав замену $t=x^2$, получаем, что неравенство $t^2-2at+(a^2-4)\geqslant 0$ должно выполняться для всех $t\geqslant 0$. Это возможно в двух случаях.

- неравенство выполняется для всех t. Это будет выполнено, если дикриминат неположителен.

- дискриминант положителен, но корни уравнения неположительны.

В нашем, случае дискриминант равен 4. Поэтому корни уравнения $t^2-2at+(a^2-4)=0$ будут $t_1=a-2$, $t_2=a+2$. Получаем систему $\begin{cases}a-2\leqslant 0\\ a+2\leqslant 0\end{cases}$ Отсюда $a\in(-\infty,-2]$.

Задача 10. Найти наименьший радиус круга, из которого можно вырезать треугольник с длинами сторон 4, 5, 7.

Решение. Применяя теорему косинусов, убеждаемся в том, что треугольник тупоугольный. Рассмотрим круг диаметра 7, построенный на большей стороне как на диаметре. Доказываем, что третья вершины лежит внутри круга. Следовательно, данный круг искомый.

Задача 11. Решить уравнение $\frac{5+3x}{\sqrt{5-x^7}}=4$.

Решение. Перепишем уравнение в виде $5+3x=4\sqrt{5-x^7}$. Отметим, что функция $y=5+3x$ возрастает, а функция $y=4\sqrt{5-x^7}$ убывает. Значит уравнение имеет не более одного корня. Видим, что 1 является корнем.

11 класс

Задача 3. Квадратное уравнение $2x^2+bx+3c=0$ имеет единственный корень $x=-3$. Найти c.

Решение. По теореме Виета $x_1x_2=\frac{3c}{2}$. Отсюда $9=\frac{3c}{2}$. Значит $c=6$.

Задача 4. Найти наибольшее целое число, не превосходящее $\sqrt{22019\cdot 22029-22016\cdot 22032}$.

Решение. Обозначим $a=22019$, тогда $22029=a+10$, $22016=a-3$, $22032=a+13$. Получаем

$$\sqrt{22019\cdot 22029-22016\cdot 22032}=\sqrt{a(a+10)-(a-3)(a+13)}=\sqrt{39}.$$

Так как $6<\sqrt{39}<7$, то 6 является искомым целым числом.

Задача 5. Раньше рис был на 21% дороже гречки. Затем рис подорожал на 50%, а гречка подорожала на 65%. На сколько процентов теперь рис дороже гречки?

Решение. Пусть первоначальная цена гречки x, тогда цена риса $1,21x$. После подорожания рис стал стоить $1,5 \cdot 1,21x = 1,815x$, а гречка $1,65x$. Составляем пропорцию

$$1,65x - 100\%$$
$$1,815x - z\%$$

Отсюда $z = 110\%$, значит рис дороже гречки на 10%.

Задача 6. Найти наибольшее значение функции $y = \frac{7}{8} \cdot 2^{3x} - \frac{3}{128} \cdot 2^{7x}$.

Решение. Вычислим производную

$$y' = \frac{7}{8} \cdot 3 \cdot 2^{3x} \ln 2 - \frac{3}{128} \cdot 7 \cdot 2^{7x} \ln 2.$$

Решаем уравнение $y' = 0$. Получаем $x = 1$. Определяем знак производной на каждом из промежутков: $(-\infty, 1]$, $[1, +\infty)$. Получаем, что $y' > 0$ на $(-\infty, 1)$ и $y' < 0$ на $(1, +\infty)$. Следовательно, в точке $x = 1$ функция принимает наибольшее значение. Вычисляя $y(1) = 7 - 3 = 4$, получаем наибольшее значение функции.

Задача 7. Найти наибольший отрицательный корень уравнения $\sin\left(2\pi x + \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение. Решением уравнения будут два набора

$$2\pi x + \frac{2\pi}{3} = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z; \quad 2\pi x + \frac{2\pi}{3} = -\frac{5\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z.$$

Отсюда

$$x = -\frac{11}{24} + n, n \in Z; \quad x = -\frac{23}{24} + k, k \in Z.$$

В первом наборе наибольший отрицательный корень будет $-\frac{11}{24}$, во втором будет $-\frac{23}{24}$. Условию задачи удовлетворяет $-\frac{11}{24}$, который и будет ответом.

Задача 8. Решить неравенство $\log_3 x - 11 - 49 \cdot \log_{27x} 3 \leqslant 0$.

Решение. ОДЗ неравенства будет $x > 0, x \neq \frac{1}{27}$. По свойству логарифма имеем

$$\log_{27x} 3 = \frac{1}{\log_3 27x} = \frac{1}{\log_3 27 + \log_3 x} = \frac{1}{3 + \log_3 x}.$$

Обозначим $t = \log_3 x$. Получим неравенство

$$t - 11 - \frac{49}{t+3} \leqslant 0, \quad \frac{(t-11)(t+3) - 49}{t+3} \leqslant 0.$$

Решая последнее неравенство методом интервалов, получаем $t \in (-\infty, 4 - 7\sqrt{2}] \cup (-3, 4 + 7\sqrt{2}]$. Следовательно, решением исходного неравенства будет $x \in (0, 3^{4-7\sqrt{2}}] \cup (\frac{1}{27}, 3^{4+7\sqrt{2}}]$.

Задача 9. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, S — вершина, сторона основания 4, боковое ребро 16. Найти угол между плоскостями ASB, BSC.

Решение. Так как треугольники ABS, CBS равны, то высоты, опущенные из вершин A и C пересекутся в точке K на ребре BS, причем на самой стороне, а не на ее продолжении. Следовательно, надо найти угол AKC. Имеем $AC = 4\sqrt{2}$. Опустим высоту SH в треугольнике ASB. Тогда

$$SH = \sqrt{16^2 - 2^2} = \sqrt{252}, \ \sin ABS = \frac{SH}{SB} = \frac{\sqrt{252}}{16} = \frac{3\sqrt{7}}{8}, \ KC = AK = AB \sin ABS = 4 \cdot \frac{3\sqrt{7}}{8} = \frac{3\sqrt{7}}{2}.$$

Применим к треугольнику AKC теорему косинусов. Получаем

$$AC^2 = AK^2 + KC^2 - 2AK \cdot KC \cdot \angle AKC; \ 32 = \frac{63}{4} + \frac{63}{4} - 2\frac{63}{4} \cdot \cos AKC.$$

Отсюда $\cos AKC = -\frac{1}{63}$, и поэтому искомый угол $\angle AKC = \arccos\left(-\frac{1}{63}\right)$.

Задача 10. В треугольнике ABC длина стороны AC в три раза меньше длины стороны AB. В каком отношении биссектриса AK делит медиану CM, считая от вершины C.

Решение. Задача на элементарное свойство биссектрисы. Пусть биссектриса и медиана пересекаются в точке L. Тогда $\frac{ML}{LC} = \frac{AM}{AC} = \frac{1{,}5AC}{AC} = \frac{3}{2}$.

Задача 11. При каких a уравнение $\big||x|-3\big|-1 = a$ имеет три различных корня?

Решение. Строим график функции $y = \big||x|-3\big|-1$ и определяем, когда горизонтальная прямая пересекает график в трех точках. Получаем при $a = 2$.

Можно задачу решить и следующим способом. Заметим, что уравнение обладает свойством: если x_0 — корень уравнения, то $-x_0$ также является корнем. Поэтому для того, чтобы уравнение имело три корня необходимо, чтобы 0 был корнем уравнения. Подставляя 0 в уравнение, получаем $a = 2$. Осталось проверить, что при $a = 2$ уравнение действительно имеет три корня. Имеем

$$\big||x|-3\big|-1 = 2, \quad \big||x|-3\big| = 3.$$

Отсюда $|x|-3 = 3$ или $|x|-3 = -3$. Первое уравнение имеет корни 6 и (-6), а второе имеет единственный корень 0. Следовательно, $a = 2$ является ответом.

Задача 12. В начале действий в коробке было 20 шаров трех цветов: белые, синие и красные. Если мы удвоим количество синих шаров, то вероятность вытащить белый шар станет на $\frac{1}{25}$ меньше, чем была изначально. Если мы уберем все белые шары, то вероятность вытащить синий шар станет на $\frac{1}{16}$ больше, чем вероятность вытащить синий шар в начале. Сколько белых шаров лежало в коробке?

Решение. Пусть было x белых шаров, y синих. Из условия задачи получаем систему

$$\begin{cases} \frac{x}{20} - \frac{1}{25} = \frac{x}{20+y}, \\ \frac{y}{20} + \frac{1}{16} = \frac{y}{20-x}. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} \frac{1}{25} = \frac{xy}{20(20+y)}, \\ \frac{1}{16} = \frac{xy}{20(20-x)}, \end{cases} \quad \text{или} \quad \frac{20+y}{25} = \frac{20-x}{16}.$$

Выражаем y. Получаем $y = \frac{25}{16}(20-x) - 20$. Подставляя y во второе уравнение, получим квадратное уравнение вида $x^2 - 8x + 16 = 0$, откуда $x = 4$.