

ЗАОЧНАЯ ОЛИМПИАДА — 2022
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
1 КУРС ВСЕ НАПРАВЛЕНИЯ

1. Последовательность вещественных чисел $\{x_n\}$ задана рекуррентным соотношением:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{b}{x_n} \right), \quad n \in \mathbb{N}, \quad b > 0.$$

Для любого начального значения x_1 исследуйте последовательность на сходимость и в случае сходимости найдите её предел.

2. Вычислите: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots + \frac{2n-1}{2^n} \right)$.

3. Найдите точные грани последовательности $\{x_n\}$, её минимальный и максимальный элементы, где

$$x_n = \sum_{k=1}^n \frac{2^{k-1}}{3^k}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

4. Чему равна сумма квадратов первых n нечетных натуральных чисел, т.е.

$$S_n = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2?$$

(Вывод формулы или доказательство методом математической индукции обязательны).

5. Какая из функций $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ или $g(x) = \operatorname{arcctg} \frac{1}{x}$ имеет на промежутке $(-0,01; 0,01)$ большее колебание? Колебание функции — это разность между её наибольшим и наименьшим значениями.

6. Найдите длину кривой, построенную с помощью следующего итерационного процесса. За основу берется отрезок. Отрезок делится на три части, на средней её части строится квадрат и стирается та его сторона, имеющая общую часть с отрезком, который делили. Получаем ломаную из пяти звеньев. Затем с каждым отрезком ломаной поступаем аналогично: делим на три части, на серединке достраиваем до квадрата, стирая ту его сторону, которая имеет общие точки с отрезком деления, и т.д.

7. Исследуйте на непрерывность и постройте график функции

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2x + x^3 e^{nx}}{1 - e^{nx}}.$$

8. Функция $f(x) = \frac{1 - \cos x + \sin^2 2x}{x^2}$ определена при всех x , кроме $x = 0$. Какое значение $f(0)$ следует задать, чтобы функция была непрерывной? Почему?

9. Воздушный шар радиуса $R = 80$ см надувают со скоростью 5 см/с. Найдите скорость изменения объема.

10. Известно, что если функция дифференцируема, то она непрерывна. Верно ли утверждение в обратную сторону? Докажите или приведите контрпример.

11. Определите количество вещественных корней уравнения и отделите эти корни: $x^3 - 3x^2 - 9x + p = 0$.

12. Докажите, что $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

13. Первичная информация разделяется по серверам №1 и №2 и обрабатывается на них. С сервера №1 при объеме t^2 Гб входящей в него информации выходит $20t$, а с сервера №2 при объеме t^2 Гб входящей в него информации выходит $21t$ Гб обработанной информации; $25 \leq t \leq 55$. Каков наибольший общий объем выходящей информации в 3364 Гб?

14. Приведите пример непрерывной функции, график которой не имеет касательной в каждой точке её области определения.

15. Для функции $f(x)$ известны значения: $f(1) = 3$, $f(2) = 1$, $f(4) = 5$. Функцию интерполируют ломаной — сплайном первой степени (кусочно-линейной функцией). Запишите аналитическое выражение для ломаной (сплайна) и найдите производную построенной функции (сплайна) в каждой точке отрезка $[1, 4]$.

16. При каких α и β данная функция дифференцируема в каждой точке:

$$y = \begin{cases} \alpha + \beta x^2, & |x| \leq 1, \\ \frac{1}{|x|}, & |x| > 1. \end{cases}$$

Будет ли при найденных α и β данная функция непрерывно дифференцируемой?

17. Найдите пределы:

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{c^x - x^c}{x - c}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}.$$

18. Может ли функция быть непрерывно дифференцируемой, но не дважды дифференцируемой?

19. Всегда ли существование производной для функции одной переменной гарантирует дифференцируемость функции? А наоборот?

20. Постройте график функции, заданной в полярных координатах: $\rho = a(1 + \cos \varphi)$.