ЗАОЧНАЯ ОЛИМПИАДА — 2022
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
2 КУРС ВСЕ НАПРАВЛЕНИЯ
старшие курсы нематематические направления подготовки

1. Последовательность вещественных чисел $\{x_n\}$ задана рекуррентным соотношением:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{b}{x_n}\right),\ n \in \mathbb{N},\ b > 0.$$

Для любого начального значения x_1 исследуйте последовательность на сходимость и в случае сходимости найдите её предел.

2. Вычислите интеграл: $\displaystyle\int\limits_{-\pi}^{\pi} x^2 \cdot \operatorname{sign}(\sin x)dx.$

3. Найдите интеграл: $\displaystyle\int \max\left\{x^2, |x|\right\} dx.$

4. Не вычисляя интеграла, докажите справедливость равенства:

$$\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} x^{100} \lg \frac{1+x}{1-x} dx = 0.$$

5. Найдите интеграл наибольшим количеством способов: $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+4)^2}.$

6. Для функции $f(x)$ известны значения: $f(1) = 3$, $f(2) = 1$, $f(4) = 5$. Функцию интерполируют сплайном второй степени (кусочно–квадратичной функцией) $S_2(x)$ так, что выполнены условия:
1) в точках $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 4$ они совпадают, т.е. $f(x_k) = S_2(x_k)$;
2) производная функции $S_2(x)$ непрерывна на отрезке $[1, 4]$;
3) $S_2'(1) = -1$.
Запишите аналитическое выражение для сплайна и найдите производную $S_2'(3)$.

7. Найдите длину кривой, построенную с помощью следующего итерационного процесса. За основу берется квадрат. Каждая сторона квадрата делится на три части, на средней её части строится квадрат и стирается та сторона квадрата, имеющая общую часть с отрезком, который делили. Получаем ломаную. Затем с каждым отрезком ломаной поступаем аналогично: делим на три части, на серединке достраиваем до квадрата, стирая ту его сторону, которая имеет общие точки с отрезком деления, и т.д.

8. Приведите пример непрерывной функции которая всюду не дифференцируема.

9. Может ли функция быть непрерывно дифференцируемой, но не дважды дифференцируемой?

10. Воздушный шар радиуса $R = 80$ см надувают со скоростью 5 см/с. Найдите скорость изменения объёма.

11. Первичная информация разделяется по n серверам и обрабатывается на них. С k-го сервера при объеме t^2 Гб входящей в него информации выходит $a_k t$, $a_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Каков наибольший общий объем выходящей информации, если первоначально поступила информация объёмом в M Гб? Можно ограничиться исследованием ситуации, когда $n = 2, 3$.

12. Найдите диаметр куба в пространстве $\mathbb{R}^3$, если используются метрики:

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{3}(x_k - y_k)^2},\ d_1(x,y) = \max_{1\leqslant k\leqslant 3}|x_k - y_k|,\ d_2(x,y) = \sum_{k=1}^{3}|x_k - y_k|.$$

В какой метрике диаметр больше?

13. Вычислите площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = t^2 - 1, \\ y = t^3 - t. \end{cases}$$

14. Докажите тождество при $|x| \geqslant 1$

$$2 \operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \pi \cdot \operatorname{sign}(x).$$

15. Докажите неравенство при $a > 0$ и $b > 0$

$$a \ln a + b \ln b > (a+b) \ln \frac{a+b}{2}.$$

16. Вычислите приближенно с точностью до 10^{-3} : $\dfrac{1}{\sqrt[3]{e}}$, $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2} dx$.

17. Найдите сумму ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3nx^{2n-1}.$$

18. Вычислите работу, которую нужно затратить, чтобы выкачать жидкость удельного веса d из резервуара, имеющего форму, обращенного вершиной вниз конуса, высота которого равна H, а радиус основания R. Как изменится результат, если конус будет обращен вершиной кверху?

19. Найдите пределы:

$$\lim_{x \to c} \frac{c^x - x^c}{x - c}, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x}.$$

20. Определите область сходимости (абсолютной и условной) для функционального ряда: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \left(\frac{3x}{2x+1} \right)^n$.