

ЗАОЧНАЯ ОЛИМПИАДА — 2022
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
старшие курсы математические направления подготовки

1. Последовательность комплексных чисел $\{z_n\}$ задана рекуррентным соотношением:

$$z_{n+1} = \frac{1}{2} \left(z_n + \frac{b}{z_n} \right), \quad n \in \mathbb{N}, \quad b > 0.$$

Для любого начального значения z_1 исследуйте последовательность на сходимость и в случае сходимости найдите её предел.

2. Найдите диаметр n -мерного куба в пространстве \mathbb{R}^n , если используются метрики:

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2}, \quad d_1(x, y) = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k - y_k|, \quad d_2(x, y) = \sum_{k=1}^n |x_k - y_k|.$$

В какой метрике диаметр больше?

3. Для функции $f(x)$ известны значения: $f(1) = 3$, $f(2) = 1$, $f(4) = 5$. Функцию интерполируют сплайном второй степени (кусочно-квадратичной функцией) $S_2(x)$ так, что выполнены условия:

- 1) в точках $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 4$ они совпадают, т.е. $f(x_k) = S_2(x_k)$;
- 2) производная функции $S_2(x)$ непрерывна на отрезке $[1, 4]$;
- 3) $S'_2(1) = -1$.

Запишите аналитическое выражение для сплайна и найдите производную $S'_2(3)$.

4. На каком из заданных промежутков $x \in [0, 1]$ или $x \in (1, +\infty)$ последовательность $f_n(x) = \frac{3nx^2}{1+n^2x^4}$ имеет сходимость: а) поточечную, б) равномерную?

5. Найдите длину кривой, построенную с помощью следующего итерационного процесса. За основу берется квадрат. Каждая сторона квадрата делится на три части, на средней её части строится квадрат и стирается та сторона квадрата, имеющая общая часть с отрезком, который делили. Получаем ломаную. Затем с каждым отрезком ломаной поступаем аналогично: делим на три части, на серединке достраиваем до квадрата, стирая ту его сторону, которая имеет общие точки с отрезком деления, и т.д.

6. Первоначальная информация разделяется по n серверам и обрабатывается на них. С k -го сервера при объеме t^2 Гб входящей в него информации выходит $a_k t$, $a_k > 0$, $k = 1, 2, \dots, n$. Каков наибольший общий объем выходящей информации, если первоначально поступила информация объемом в M Гб?

7. Вычислите приближенно с точностью до 10^{-3} : $\sqrt[3]{e}$, $\int_0^1 \frac{\sin x^2}{x} dx$.

8. Найдите все непрерывные функции $f(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$, удовлетворяющие для всех вещественных x и y уравнению:

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y).$$

9. Найдите область сходимости интеграла:

$$\int_0^{+\infty} x^{\alpha-101} \operatorname{arctg}^\alpha \frac{2x}{1+x} dx.$$

10. Определите область сходимости (абсолютной и условной) для функционального ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n-1} \left(\frac{2x-1}{3x+1} \right)^n.$$

11. Вычислите: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots + \frac{2n-1}{2^n} \right).$

12. Найдите интеграл: $\int \max \{(x-1)^3, 1-|x|\} dx.$

13. Вычислите площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = t^2 - 1, \\ y = t^3 - t. \end{cases}$$

14. Докажите тождество при $|x| \geq 1$

$$2 \operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \pi \cdot \operatorname{sign}(x).$$

15. Докажите неравенство при $a > 0$ и $b > 0$

$$a \ln a + b \ln b > (a+b) \ln \frac{a+b}{2}.$$

16. Вычислите интеграл: $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cdot \operatorname{sign}(\sin x) dx.$

17. Найдите сумму ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3nx^{2n-1}.$$

18. При каких α и β данная функция дифференцируема в каждой точке:

$$y = \begin{cases} \alpha + \beta x^2, & |x| \leq 1, \\ \frac{1}{|x|}, & |x| > 1. \end{cases}$$

Будет ли при найденных α и β данная функция непрерывно дифференцируемой?

19. Вычислите интеграл наибольшим количеством способов: $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x} dx}{(x+1)^2}.$

20. Вычислите интеграл:

$$\iint_P [x+y] dxdy, \quad P = [0, 2] \times [0, 2],$$

где $[\cdot]$ — целая часть числа.