Удмуртский государственный университет
Институт математики, информационных технологий и физики
Уральский математичский центр
Олимпиада по математике, 12 марта 2022 года
Решение некоторых задач первого варианта

5. Найти наибольший отрицательный корень уравнения $-2\sin x = \operatorname{tg} 2x$.

Решение. Отметим, что ОДЗ уравнения $\cos 2x \neq 0$. Перепишем уравнение в виде

$$\operatorname{tg} 2x + 2\sin x = 0, \quad \frac{\sin 2x}{\cos 2x} + 2\sin x = 0.$$

Так как $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, то уравнение можно записать в виде

$$\frac{2\sin x\cos x}{\cos 2x} + 2\sin x = 0, \quad 2\sin x\Big(\frac{\cos x + \cos 2x}{\cos 2x}\Big) = 0.$$

Так как произведение равно нулю, то $\sin x = 0$ или $\cos x + \cos 2x = 0$.

Если $\sin x = 0$, то $x = k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Наибольший отрицательный корень равен $-\pi$. Отметим, что он входит в ОДЗ.

Если $\cos x + \cos 2x = 0$, то $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$. Отсюда $\cos x = -1$ или $\cos x = \frac{1}{2}$.

Решением уравнения $\cos x = -1$ будут $x = \pi + 2\pi n, n \in Z$. Поэтому в данной серии наибольший отрицательный корень равен $-\pi$.

Решая уравнение $\cos x = \frac{1}{2}$, получаем $x = \pm\big(\frac{\pi}{3}\big) + 2\pi n, n \in Z$. В данной серии наибольший отрицательный корень равен $-\frac{\pi}{3}$.

Поэтому наибольший отрицательный корень уравнения равен $-\frac{\pi}{3}$.

Ответ: $-\frac{\pi}{3}$.

6. Решить неравенство $\log_2(3x-5) \leqslant \log_4(8x-4)$.

Решение. ОДЗ неравенства состоит из тех x для которых справедливы неравенства

$$3x - 5 > 0, 8x - 4 > 0.$$

Отсюда ОДЗ будет $x \in (\frac{5}{3}, \infty)$.

По свойству логарифима неравенство можно представить в виде

$$\log_2(3x-5) \leqslant \frac{1}{2}\log_2(8x-4), \quad \log_2(3x-5) \leqslant \log_2\sqrt{(8x-4)}.$$

Так основание логарифма больше 1, то неравенство равносильно неравенству

$$3x - 5 \leqslant \sqrt{8x-4},$$

которое на ОДЗ равносильно неравенству

$$(3x-5)^2 \leqslant 8x-4, \quad 9x^2 - 30x + 25 \leqslant 8x - 4, \quad 9x^2 - 38x + 29 \leqslant 0.$$

Решая последнее неравенство, получаем $x \in [1, \frac{29}{9}]$. С учетом ОДЗ получаем $x \in \big(\frac{5}{3}, \frac{29}{9}\big]$.

Ответ: $x \in \big(\frac{5}{3}, \frac{29}{9}\big]$.

7. $SABC$ — треугольная пирамида, $AB = 12, BC = 16, AC = 20$. Все боковые ребра наклонены к плоскости основания ABC под углом 45^0. Найти расстояние от вершины C до плоскости ASB.

Решение. Отметим несколько фактов, которые помогут решить задачу.

1) Если боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом, то высота пирамиды, опущенная на основание проходит через центр окружности, описанной около основания. Наше основание — треугольник ABC является прямоугольным и поэтому центр описанной около этого треугольника окружности находится на середине гипотенузы AC. Радиус окружности равен 10. Кроме того, боковые ребра равны.

2) В треугольной пирамиде любую грань можно взять в качестве основания.

3) Расстояние от точки до плоскости равно длине перпендикуляра, опущенного из данной точке на плоскость.

Поэтому нам нужно найти высоту пирамиды, опущенной из вершины C на плоскость ASB. Найдем объем пирамиды $SABC$ по формуле

$$V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SH,$$

где SH — высота пирамиды. $S_{ABC} = \frac{1}{2} 12 \cdot 16 = 96$. H — центр окружности, описанной около треугольника ABC, поэтому $AH = 10$. По условию $\angle SAH = 45^0$. Поэтому $SH = AH = 10$.

Следовательно, объем пирамиды равен $V = \frac{1}{3} \cdot 96 \cdot 10 = 320$.

С другой стороны, объем пирамиды $SABC$ можно вычислить следующим образом

$$V = \frac{1}{3} S_{ASB} \cdot CZ,$$

где CZ — высота пирамиды, опущенной из C на плоскость ASB. Найдем площадь треугольника ASB. По теореме Пифагора $AS^2 = SH^2 + AH^2$. Поэтому $AS = BS = 10\sqrt{2}$. $AB = 12$. Поэтому высота треугольника ASB, опущенная из вершины S на сторону AB равна $\sqrt{(10\sqrt{2})^2 - 6^2} = \sqrt{164} = 2\sqrt{41}$. Следовательно, площадь треугольника ASB равна $\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 2\sqrt{41} = 12\sqrt{41}$. Тогда объем пирамиды $SABC$ равен

$$V = \frac{1}{3} \cdot 12\sqrt{41} \cdot CZ = 4\sqrt{41} \cdot CZ.$$

Имеем $320 = 4\sqrt{41} CZ$, откуда $CZ = \frac{80}{\sqrt{41}} = \frac{80\sqrt{41}}{41}$.

Ответ: $\frac{80\sqrt{41}}{41}$.

8. Найти площадь треугольника, если две стороны 35 и 14, а биссектриса угла между ними 12.

Решение. Пусть $AB = 35, AC = 14$, биссектриса $AK = 12$. Обозначим $\angle BAK = \alpha$, тогда $\angle KAC = \alpha$, $\angle BAC = 2\alpha$. Площадь треугольника ABC можно представить в виде

$$S_{ABC} = S_{BAK} + S_{KAC}.$$

Поэтому имеем

$$\frac{1}{2} AB \cdot AC \sin 2\alpha = \frac{1}{2} AB \cdot AK \sin\alpha + \frac{1}{2} AK \cdot AC \sin\alpha,$$

или

$$35 \cdot 14 \cdot \sin 2\alpha = 35 \cdot 12 \sin\alpha + 14 \cdot 12 \sin\alpha, \quad 2 \cdot 35 \cdot 14 \cdot \sin\alpha \cos\alpha = 12 \cdot 49 \sin\alpha.$$

Так как $\sin\alpha \neq 0$, получаем $2 \cdot 35 \cdot 14 \cdot \cos\alpha = 12 \cdot 49$. Откуда $\cos\alpha = \frac{3}{5}$. Из основного тригонометрического тождества получаем (учитываем, что $\sin\alpha > 0$) $\sin\alpha = \frac{4}{5}$.

Поэтому площадь треугольника ABC равна $\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 49 \cdot \frac{4}{5} = \frac{1176}{5}$.

Ответ: $\frac{1176}{5}$.

9. Найти наибольшее значение функции $y = \frac{x}{4x^2 - 2x + 1}$.

Решение 1. Отметим, что знаменатель дроби всегда положителен. Поэтому наибольшее значение функция достигает при $x > 0$. По неравенсту Коши имеем

$$4x^2 + 1 \geqslant 2\sqrt{4x^2} = 4x.$$

Поэтому при $x > 0$ справедливы неравенства

$$4x^2 - 2x + 1 \geqslant 4x - 2x = 2x, \quad \frac{x}{4x^2 - 2x + 1} \leqslant \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}.$$

При $x = \frac{1}{2}$ значение функции равно $\frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Решение 2. Задачу можно переформулировать следующим образом. Найти наибольшее a при котором уравнение

$$\frac{x}{4x^2 - 2x + 1} = a$$

имеет решение. Так как знаменатель не обращается в нуль, то уравнение можно записать в виде

$$x = a(4x^2 - 2x + 1), \quad 4ax^2 - (2a+1)x + a = 0.$$

При $a = 0$ уравнение имеет решение $x = 0$. Если $a \neq 0$, то наше уравнение является квадратным и поэтому оно имеет решение, если дискриминат неотрицателен. Получаем

$$D = (2a+1)^2 - 16a^2 = -12a^2 + 4a + 1 \geqslant 0.$$

Решая последнее неравенство, получаем ответ.

10. В школьном тесте 5 разделов, каждый из которых содержит одинаковое число вопросов. Петя правильно ответил на 20 вопросов. При этом процент его верных ответов оказался больше 60, но меньше 70. Сколько всего вопросов было в тесте?

Решение. Пусть всего вопросов в тесте N. Тогда по условию имеем

$$\frac{60}{100} < \frac{20}{N} < \frac{70}{100}.$$

Решая неравенство $\frac{60}{100} < \frac{20}{N}$, получаем $N < \frac{100}{3}$. Так как N является целым числом, то $N \leqslant 33$.
Решая неравенство $\frac{20}{N} < \frac{70}{100}$, получаем $N > \frac{200}{7}$. Так как N является целым числом, то $N \geqslant 29$.
Из условия задачи следует, что N делится на 5. Поэтому $N = 30$.
Ответ: $N = 30$.

11. При каких a уравнение $3\sqrt{x+2} = 2x + a$ имеет два различных корня?

Решение. ОДЗ уравнения $x \in [-2, \infty)$.

Решение. Рассмотрим функцию

$$y = 3\sqrt{x+2} - 2x, \quad x \in [-2, +\infty)$$

и построим ее график. Тогда задача сведется к задаче: при каких a прямая $y = a$ пересекает график функции в двух различных точках? Исследуем функцию на монотонность.

$$y' = \frac{3}{2\sqrt{x+2}} - 2 = \frac{3 - 4\sqrt{x+2}}{2\sqrt{x+2}}.$$

Корень числителя $x = -\frac{23}{16}$. Определяя знак производной (отметим, что знаменательн положителен для всех $x \in (-2, +\infty)$), получаем, что функция возрастает на $[-2, -\frac{23}{16}]$ и убывает на $[-\frac{23}{16}, +\infty)$.

$$f(-2) = 4, \quad f\Big(-\frac{23}{16}\Big) = \frac{41}{8}.$$

Если x стремится к плюс бесконечности, то y стремится к минус бесконечности. Поэтому уравнение будет иметь два корня, если $a \in [4, \frac{41}{8})$.

Ответ: $a \in [4, \frac{41}{8})$.

12. Последовательность a_n задана рекуррентно равенствами $a_1 = 7, a_n = a_{n-1} + 2n - 1, n \geqslant 2$. Найдите a_{2021}.

Решение. Рассмотрим новую последовательнось $\{b_n\}$ вида $b_n = a_{n+1} - a_n$. Тогда получаем

$$b_n = a_n + 2(n+1) - 1 - a_n = 2n + 1.$$

Так как $b_{n+1} - b_n = 2(n+1) + 1 - (2n+1) = 2$, то $\{b_n\}$ — арифметическая прогрессия с первым членом 3 и разностью 2. Кроме того, имеем

$$b_1 = a_2 - a_1, \; b_2 = a_3 - a_2, \; \ldots, b_{2020} = a_{2021} - a_{2020}.$$

Складывая все эти равенства, получим

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_{2020} = a_{2021} - a_1.$$

Так как $b_{2020} = 2 \cdot 2020 + 1 = 4041$, то

$$b_1 + \ldots + b_{2020} = \frac{b_1 + b_{2020}}{2} \cdot 2020 = \frac{3 + 4041}{2} \cdot 2020 = 2022 \cdot 2020.$$

Поэтому $a_{2021} = 7 + 2022 \cdot 2020$.

Ответ: $7 + 2022 \cdot 2020$.