**Удмуртский государственный университет**
**Математический факультет**
**Олимпиада «Абитуирент-2015»**
**Вариант №1.**

1. В супермаркете проходит рекламная акция: заплатив за две шоколадки, покупатель получает три шоколадки (одна шоколадка в подарок). Шоколадка стоит 35 рублей. Какое наибольшее число шоколадок можно получить на 200 рублей?

2. Решите уравнение: $(x-2)\operatorname{tg}\pi x = |x-2|$.

3. Найдите все целые решения неравенства: $(x^2-9x+14)\sqrt{3+x} \leqslant 0$.

4. Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями $BC$ и $AD$ пересекаются в точке $M$. Площади треугольников $AMB$ и $BMC$ равны 4 и 2 см$^2$. Найдите площадь трапеции.

5. Из кругового турнира по регби, где каждая команда играет с каждой, одна команда выбыла, сыграв 8 матчей. Всего в турнире было сыграно 53 матча. Сколько было команд первоначально?

6. Известно, что величины $5\cdot 2^x$, $10-\sqrt{x^2-1}$ и $5\cdot 2^{2-x}$ являются последовательными членами арифметической прогрессии. Определите, при каких значениях $x$ это возможно.

7. При каких значениях параметра $a$ уравнение $\cos\sqrt{x(a-x)}=0$ имеет ровно 2015 корней?

**Удмуртский государственный университет**
**Математический факультет**
**Олимпиада «Абитуирент-2015»**
**Вариант №2.**

1. В супермаркете проходит рекламная акция: заплатив за две тетради, покупатель получает три тетради (одна тетрадь в подарок). Тетрадь стоит 75 рублей. Какое наибольшее число тетрадей можно получить на 400 рублей?

2. Решите уравнение: $(x-3)\operatorname{ctg}\pi x = |x-3|$.

3. Найдите все целые решения неравенства: $(x^2-11x+18)\sqrt{7+x} \leqslant 0$.

4. Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями $BC$ и $AD$ пересекаются в точке $P$. Точка $P$ делит диагональ $AC$ в отношении $2:1$, считая от вершины $A$. Площадь трапеции $ABCD$ равна 36 см$^2$. Найдите площади треугольников $APB$ и $BPC$.

5. Из кругового турнира по фехтованию, где каждый участник встречается с каждым, один участник выбыл, проведя 5 встреч. Всего в турнире было проведено 33 встречи. Сколько было участников первоначально?

6. Известно, что величины $3\cdot 2^p$, $12-\sqrt{p^2-1}$ и $3\cdot 2^{2-p}$ являются последовательными членами арифметической прогрессии. Определите, при каких значениях $p$ это возможно.

7. При каких значениях параметра $a$ уравнение $\cos\sqrt{x(a-x)}=1$ имеет ровно 2015 корней?

**Удмуртский государственный университет**
**Математический факультет**
**Олимпиада «Абитуирент-2015»**
**Вариант №3.**

1. В супермаркете проходит рекламная акция: заплатив за две пары носков, покупатель получает три пары носков (одна пара носков в подарок). Пара носков стоит 55 рублей. Какое наибольшее число пар носков можно получить на 500 рублей?

2. Решите уравнение: $(x-4)\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2}x = |x-4|$.

3. Найдите все целые решения неравенства: $(x^2-7x+10)\sqrt{1+x} \leqslant 0$.

4. Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями $BC$ и $AD$ пересекаются в точке $M$. Площади треугольников $AMB$ и $BMC$ равны 6 и 2 см$^2$. Найдите площадь трапеции.

5. Из кругового турнира по гандболу, где каждая команда играет с каждой, одна команда выбыла, сыграв 7 матчей. Всего в турнире было сыграно 43 матча. Сколько было команд первоначально?

6. Известно, что величины $5\cdot 3^x$, $15-\sqrt{x^2-1}$ и $5\cdot 3^{2-x}$ являются последовательными членами арифметической прогрессии. Определите, при каких значениях $x$ это возможно.

7. При каких значениях параметра $a$ уравнение $\cos\sqrt{x(a-x)} = 0$ имеет ровно 2015 корней?

**Удмуртский государственный университет**
**Математический факультет**
**Олимпиада «Абитуирент-2015»**
**Вариант №4.**

1. В супермаркете проходит рекламная акция: заплатив за две ручки, покупатель получает три ручки (одна ручка в подарок). Ручка стоит 85 рублей. Какое наибольшее число ручек можно получить на 600 рублей?

2. Решите уравнение: $(x-1)\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{2}x = |x-1|$.

3. Найдите все целые решения неравенства: $(x^2-13x+42)\sqrt{4+x} \leqslant 0$.

4. Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями $BC$ и $AD$ пересекаются в точке $P$. Точка $P$ делит диагональ $AC$ в отношении $3:1$, считая от вершины $A$. Площадь трапеции $ABCD$ равна 32 см$^2$. Найдите площади треугольников $APB$ и $BPC$.

5. Из кругового турнира по боксу, где каждый участник встречается с каждым, один участник выбыл, проведя 6 встреч. Всего в турнире было проведено 27 встреч. Сколько было участников первоначально?

6. Известно, что величины $7\cdot 3^p$, $21-\sqrt{p^2-1}$ и $7\cdot 3^{2-p}$ являются последовательными членами арифметической прогрессии. Определите, при каких значениях $p$ это возможно.

7. При каких значениях параметра $a$ уравнение $\cos\sqrt{x(a-x)} = 1$ имеет ровно 2015 корней?

# Олимпиада

## *«Абитуриент-2015»*

### Решения задач

1. *Ответ*: 7 шоколадок.

*Решение*: На 200 рублей можно купить не более 5 шоколадок. За каждые две шоколадки в подарок получаем одну. Таким образом, на 200 рублей можно получить не более 7 шоколадок.

2. *Ответ*: $x=2$; $x=\frac{1}{4}+n, n\geq 2$; $x=-\frac{1}{4}+n, n\leq 2$.

   *Решение:* Область допустимых значений данного уравнения определяется неравенством: $x\neq\frac{1}{2}+n, n\in\boldsymbol{Z}$.

   Заметим, что $x=2$ - корень уравнения. При $x>2$ данное уравнение равносильно тригонометрическому: $tg\ \pi x=1$, а при $x<2$ уравнению: $tg\ \pi x=-1$.
   Решая эти уравнения, получим ответ.

3. *Ответ:* -3; 2; 3; 4; 5; 6; 7.

   *Решение:* Данное неравенство определено при всех $x\geq -3$. При $x=-3$ неравенство обращается в равенство. При $x>-3$ данное неравенство равносильно квадратному: $x^2-9x+14\leq 0$. Решением этого неравенства служит множество: $2\leq x\leq 7$. Все целые числа из этих двух множеств дают ответ задачи.

4. *Ответ*: 18 см$^2$.

   *Решение:* Треугольники *ABM* и *BMC* имеют общую высоту, следовательно, *AM:MC=2:1.* Из подобия треугольников *BMC* и *AMD* следует, что *MC:AM=1:2*, а $S_{BMC}:S_{AMD}$=1:4. Таким образом, $S_{CMD}=2S_{BMC}=4$, $S_{AMD}=4S_{BMC}=8$, $S_{ABCD}=18$.

5. *Ответ*: 11.

   *Решение:* Пусть первоначально в турнире принимали участие n команд. Тогда в конце турнира осталась (n-1) команда. Оставшимися участницами было сыграно между собой $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ матчей. Действительно, каждая из (n-1) команд сыграла с каждой из своих соперниц (а их ровно (n-2) ). Всего при этом получается (n-1)(n-2) матчей, при этом каждая встреча посчитана дважды. Всего в турнире было сыграно $\frac{(n-1)(n-2)}{2}+8$ матчей. Составим уравнение: $\frac{(n-1)(n-2)}{2}+8=53$. Из двух корней этого уравнения ($n_1$=-8, $n_2$=11) условию задачи удовлетворяет лишь второй.

6. *Ответ:* $x=1$

   *Решение*: Для последовательных членов арифметической прогрессии должно выполняться равенство: $5\left(2^x+2^{2-x}\right)=2\left(10-\sqrt{x^2-1}\right)$. Из неравенства Коши следует, что $5\left(2^x+2^{2-x}\right)\geq 10\sqrt{2^x\cdot 2^{2-x}}=20$. Оценим правую часть равенства:

2(10- $\overline{x^2-1}) \leq 20.$ Из этих оценок следует, что равенство возможно, только если обе части равенства равны 20. Легко видеть, что это выполняется только при $x = 1$.

7. *Ответ*: $a = \pm 2017\pi$.

   *Решение*: Данное уравнение равносильно уравнению $\overline{x(a-x)} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

   Поскольку $0 \leq \overline{x(a-x)} \leq \frac{a}{2}$, то уравнение будет иметь ровно 2015 корней только в том случае, если при $n = 1008$ выполняется равенство: $\frac{a}{2} = \frac{\pi}{2} + 1008\pi$.