

**Вариант 1.**

1. Поле комплексных чисел. Его конструкция. Алгебраическая и тригонометрическая форма записи комплексных чисел. Формула Муавра и формула извлечения корней  $n$ -ой степени из комплексного числа.
2. Принцип сжимающих отображений. (Теорема о неподвижной точке.) Примеры применения.
3. Составить линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, частным решением которого является функция  $e^{-t} \sin 2t$ .
4. Является ли функция  $\cos t$  решением экстремальной задачи

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\dot{x}^2 - x^2) dt \rightarrow \text{extr}, x(0) = 1, x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

5. Найти косинус угла между векторами  $\vec{BA}$  и  $\vec{BC}$ , если  $A(3; -2; 3)$ ,  $B(2; 0; 1)$ ,  $C(-2; 3; 1)$ .
6. Вычислить  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{\sin^2 x}$ .
7. Найти математическое ожидание и дисперсию суммы независимых случайных величин  $X_1$  и  $X_2$ , если  $P(X_1 = 1) = 0.6$ ,  $P(X_1 = 2) = 0.4$ ,  $P(X_2 = 0) = 0.2$ ,  $P(X_2 = 1) = 0.4$ ,  $P(X_2 = 2) = 0.4$ .

**Вариант 2.**

1. Корни  $n$ -ой степени из комплексного числа  $z$  из 1. Группа корней  $n$ -ой степени из 1. Первообразные корни  $n$ -ой степени из 1. Круговые многочлены порядка  $n$ , их определение и построение в частных случаях.
2. Числовые характеристики случайной величины, их свойства. Числовые характеристики системы случайных величин.
3. Исследовать на устойчивость по первому приближению положение равновесия  $(0, 0)$  системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x + y + 2x^3 + \ln(1 + x) \\ \dot{y} = -x - 2y + 3x^5 \end{cases}$$

4. Решить простейшую задачу вариационного исчисления  $\int_0^{\pi} (4\dot{x}^2(t) - x^2(t)) dt \rightarrow \text{extr}$ ,  $x(0) = 0$ ,  $x(\pi) = 0$
5. Найти объем пирамиды, построенной на векторах:  $\vec{a}(3; -1; 2)$ ,  $\vec{b}(2; 1; 0)$ ,  $\vec{c}(1; 0; 4)$ .
6. Найти интеграл  $\int \frac{2x + 1}{x^2 - x + 1} dx$ .
7. Исследовать сходимость числового ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n + 1)!}{(3n + 4)3^n}$ .

**Вариант 3.**

1. Векторное пространство и его свойства. Линейная комбинация и линейная оболочка векторов. Линейная зависимость и независимость системы векторов. Свойства линейной зависимости.
2. Численные методы решения нелинейных уравнений (метод половинного деления, метод Ньютона, метод простых итераций).
3. Составить линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, частным решением которого является функция  $e^{3t} \sin t$ .
4. Решить простейшую задачу вариационного исчисления

$$\int_0^{\pi/2} (\dot{x}^2(t) - x^2(t)) dt \rightarrow \text{extr}, x(0) = 0, x(\pi/2) = 2$$

5. Найти матрицу  $A^{-1}$ , обратную данной

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

6. Найти математическое ожидание и дисперсию произведения независимых случайных величин  $X_1$  и  $X_2$ , если  $P(X_1 = 1) = 0.5$ ,  $P(X_1 = 2) = 0.5$ ,  $P(X_2 = 0.5) = 0.4$ ,  $P(X_2 = 1) = 0.6$ .
7. Найти объем тела, ограниченного поверхностями  $y = x^2$ ,  $y = 1$ ,  $z = x^2 + y^2$ ,  $z = 0$ .

**Вариант 4.**

1. Векторные подпространства векторного пространства: их сумма и пересечение. Свойства. Прямая сумма векторных подпространств, критерии и свойства прямой суммы.
2. Случайная величина. Распределение. Функция распределения случайной величины. Плотность распределения вероятностей. Вероятность попадания в интервал при одном испытании.
3. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = e^{x-2y} - \cos 3x \\ \dot{y} = \sqrt{4 + 16x} - 2e^y + x - y \end{cases}$$

4. Даны координаты вершин пирамиды  $A_1, A_2, A_3, A_4$ . Найти длину ребра  $A_1A_2$ , если  $A_1(4; 2; 5)$ ,  $A_2(0; 7; 2)$ ,  $A_3(0; 2; 7)$ ,  $A_4(1; 5; 0)$ .
5. Найти матрицу  $A^{-1}$ , обратную данной

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

6. Исследовать сходимость числового ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n(n+1)}$ .
7. Исследовать функцию  $u(x, y) = (x + y^2)e^x$  на экстремум.

**Вариант 5.**

1. Матрицы. Их виды и операции над матрицами. Понятие перестановки и четности перестановки. Определитель матрицы и его свойства.

2. Линейные операторы в нормированных пространствах. Норма линейного оператора.

3. Составить линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, частным решением которого является функция  $e^t \cos 6t$ .

4. Даны координаты вершин пирамиды  $A_1, A_2, A_3, A_4$ . Найти угол между ребром  $A_1A_4$  и гранью  $A_1A_2A_3$ , если  $A_1(4; 2; 5), A_2(0; 7; 2), A_3(0; 2; 7), A_4(1; 5; 0)$ .

5. Вычислить

$$\left( \frac{-6 + 2i}{1 + 3i} \right)^3$$

6. Найти интеграл  $\int \frac{x^3 - x^2}{x + 3} dx$ .

7. Найти объем тела, ограниченного поверхностями  $z = 6 - x^2 - y^2, z = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

-----

**Вариант 6.**

1. Понятие обратной матрицы, ее существование и единственность, методы вычисления и построения. Ранг матрицы, его свойства и методы вычисления. Базисный минор и его свойства.

2. Разложение функций вещественной переменной в степенной ряд. Ряд Тейлора. Условия сходимости ряда Тейлора к порождающей функции.

3. Решить задачу Коши  $\ddot{x} + \dot{x} = f(t), x(1) = 0, \dot{x}(1) = -1, f(t) = \begin{cases} e^t, & t \leq 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$

4. Вычислить

$$\left( \frac{-2 + 7i}{\frac{7}{2} + i} \right)^5$$

5. Найти косинус угла между векторами  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{AC}$ , если  $A(3; 0; 1), B(5; -2; 2), C(-1; -3; 1)$ .

6. Исследовать функцию  $u(x, y) = 3x^2 + 3y^2 - x^3 + 4y$  на экстремум.

7. Вычислить  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}$ .

**Вариант 7.**

1. Евклидовы векторные пространства. Норма вектора и ее свойства. Ортонормированный базис и его свойства.
2. Основные понятия теории числовых рядов. Абсолютная и условная сходимость рядов. Признаки сходимости числовых рядов.
3. Исследовать на устойчивость по первому приближению положение равновесия  $(0, 0)$  системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x + y + 2x^3 + \sin x \\ \dot{y} = -x - 2y + 3x^5 + \sin 2x \end{cases}$$

4. Найти  $z^{20}$ , если  $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ .
5. Найти косинус угла между векторами  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{AC}$ , если  $A(2; 4; -1)$ ,  $B(0; 4; 0)$ ,  $C(-1; 4; -2)$ .
6. Вычислить  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\sqrt{1 + \sin x^2} - 1}$ .
7. Найти интеграл  $\int \frac{x^3 - x^2}{x + 3} dx$ .

**Вариант 8.**

1. Скалярное, векторное и смешанное произведение векторов.
2. Интеграл Римана. Определение и свойства. Критерий существования. Классы функций, для которых интеграл существует.
3. Найти фундаментальную матрицу системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -2y \\ \dot{y} = 2x \end{cases}$$

4. Найти кривую, у которой точка пересечения касательной с осью абсцисс одинаково удалена от точки касания и от начала координат.
5. Найти  $z^{20}$ , если  $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ .
6. Исследовать функцию  $u(x, y) = (x + y^2)e^x$  на экстремум.
7. Найти область сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} \frac{x^n}{5^n}$ .

**Вариант 9.**

1. Прямая в пространстве. Взаимное расположение двух прямых. Взаимное расположение прямой и плоскости.
2. Экстремум функции двух переменных. Необходимое условие экстремума. Достаточное условие экстремума.
3. Решить задачу Коши

$$x^{(4)} + \ddot{x} = t \cdot \cos 2t, \quad x(0) = \dot{x}(0) = \ddot{x}(0) = x^{(3)}(0) = 0.$$

4. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса и записать ее общее решение:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 3 \end{cases}$$

5. Найти косинус угла между векторами  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{AC}$ , если  $A(2; 4; -1)$ ,  $B(0; 4; 0)$ ,  $C(-1; 4; -2)$ .
6. Найти объем тела, ограниченного поверхностями  $z = 6 - x^2 - y^2$ ,  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ .
7. Найти интеграл  $\int \frac{x^3 - x^2}{x + 3} dx$ .

-----

**Вариант 10.**

1. Различные виды уравнений плоскости. Расстояние от точки до плоскости. Взаимное расположение плоскостей.
2. Производная функции одной переменной, ее геометрический и механический смысл. Производное отображение функции, действующее из  $\mathbf{R}^n$  в  $\mathbf{R}^m$ .
3. Решить уравнение  $\dot{x} - 4x = t^2$ ,  $x(0) = 1$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ .
4. Решить простейшую задачу вариационного исчисления:

$$\int_0^1 (tx(t) + \dot{x}^2(t)) dt \rightarrow \min, \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

5. Найти размерность и базис пространства решений однородной системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 = 0 \end{cases}$$

6. Найти математическое ожидание и дисперсию суммы независимых случайных величин  $X_1$  и  $X_2$ , если  $P(X_1 = 1) = 0.6$ ,  $P(X_1 = 2) = 0.4$ ,  $P(X_2 = 0) = 0.2$ ,  $P(X_2 = 1) = 0.4$ ,  $P(X_2 = 2) = 0.4$ .
7. Найти интеграл  $\int \frac{x^4 - 2x^2}{x^2 + 1} dx$ .

**Вариант 11.**

1. Линейные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.
2. Различные определения непрерывности функции в точке и на множестве. Непрерывность сложной функции.
3. Проверить, является ли точка  $(0; 1; 2)$  решением задачи линейного программирования

$$x_1 + x_2 - 2x_3 \rightarrow \min \begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 7 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

4. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах:  $\vec{a}(-1; 2; 3)$ ,  $\vec{b}(2; -1; 4)$ .
5. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

6. Вычислить  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x^2} - \cos x}{3 \sin^2 x}$ .
7. Плотность распределения случайной величины  $\xi$  равна  $f(x) = 2x - 1$  при  $x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$  и равна 0 для остальных  $x$ . Найти математическое ожидание  $\xi$  и вероятность  $P\{\xi \in [0, 8; 1, 2]\}$ .

**Вариант 12.**

1. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \quad x \in R^n.$$

2. Два определения предела функции в точке и их эквивалентность. Предел функции при  $x \rightarrow \infty$ . Односторонние пределы.
3. Проверить, является или нет точка  $(1, 2, 0, 0, 0)$  крайней точкой множества

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 1, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

4. Найти площадь треугольника, построенного на векторах:  $\vec{a}(3; -2; 1)$ ,  $\vec{b}(2; -4; 1)$ .
5. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

6. Исследовать сходимость числового ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{(3n+4)3^n}$ .
7. Найти интерполяционный многочлен Лагранжа по следующим данным:  $f(-3) = -5$ ,  $f(-1) = -11$ ,  $f(2) = 10$ .

**Вариант 13.**

1. Устойчивость по Ляпунову. Теоремы об устойчивости по первому приближению.
2. Предел числовой последовательности, его основные свойства. Предел последовательности в метрическом пространстве. Полнота метрического пространства. Сходимость в пространстве  $\mathbf{R}^n$ .
3. Написать задачу, двойственную к задаче линейного программирования

$$3x_1 - 4x_2 - x_3 - x_4 \rightarrow \min \quad \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 2 \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 - x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 \geq -1 \\ x_1 \leq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

4. Найти частное решение систем линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1 \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \end{cases}$$

5. Найти косинус угла между векторами  $\vec{AB}$  и  $\vec{BC}$ , если  $A(2; 4; -1)$ ,  $B(0; 4; 0)$ ,  $C(-1; 4; -2)$ .
6. Найти интеграл  $\int \frac{2x+1}{x^2-x+1} dx$ .
7. Вычислить  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\sqrt{1 + \sin x^2} - 1}$ .

**Вариант 1.**

1. Устойчивость по Ляпунову. Теоремы об устойчивости по первому приближению.
2. Числовые характеристики случайной величины, их свойства. Числовые характеристики системы случайных величин.
3. Решить простейшую задачу вариационного исчисления:

$$\int_1^2 t\dot{x}^2(t)dt \rightarrow \min, \quad x(1) = 1, \quad \dot{x}(1) = -1.$$

4. Найти косинус угла между векторами  $\vec{BA}$  и  $\vec{BC}$ , если  $A(5; 2; 1)$ ,  $B(2; 4; 2)$ ,  $C(1; 0; 7)$ .
5. Найти  $z^{20}$ , если  $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ .
6. Найти наименьшее количество материала, необходимое для изготовления шатра заданного объема  $V$  и имеющего форму цилиндра с конической крышей.
7. Вычислить  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\sqrt{1+x^2} - 1}$ .

**Вариант 2.**

1. Линейные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.
2. Два определения предела функции в точке и их эквивалентность. Предел функции при  $x \rightarrow \infty$ . Односторонние пределы.
3. Решите задачу Коши

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x + 2y, \quad x(0) = 0, \\ \dot{y} &= -2x - 5y, \quad y(0) = 1. \end{aligned}$$

4. Найти площадь треугольника, построенного на векторах:  $\vec{a}(3; -2; 1)$ ,  $\vec{b}(2; -4; 1)$ .
5. Вычислить

$$\left( \frac{-2 + 7i}{\frac{7}{2} + i} \right)^5$$

6. Найти интеграл  $\int \frac{3x - 2}{x^2 - x} dx$ .

7. Найти область сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n+1}{n} \right)^{n^2} \frac{(x-1)^n}{5^n}$ .



**Вариант 3.**

1. Поле комплексных чисел. Его конструкция. Алгебраическая и тригонометрическая форма записи комплексных чисел. Формула Муавра и формула извлечения корней  $n$ -ой степени из комплексного числа.
2. Производная функции одной переменной, ее геометрический и механический смысл. Производное отображение функции, действующее из  $\mathbf{R}^n$  в  $\mathbf{R}^m$ .
3. Найти фундаментальную матрицу системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -2y \\ \dot{y} = 2x \end{cases}$$

4. Даны координаты вершин пирамиды  $A_1, A_2, A_3, A_4$ . Найти угол между ребром  $A_1A_4$  и гранью  $A_1A_2A_3$ , если  $A_1(4; 2; 5), A_2(0; 7; 2), A_3(0; 2; 7), A_4(1; 5; 0)$ .
5. Найти матрицу  $A^{-1}$ , обратную данной

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

6. Исследовать сходимость числового ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n(n+1)}$ .

7. Найти интеграл  $\int \frac{x^3 - x^2 - 2}{x - 1} dx$ .

-----

**Вариант 4.**

1. Различные виды уравнений плоскости. Расстояние от точки до плоскости. Взаимное расположение плоскостей.
2. Интеграл Римана. Определение и свойства. Критерий существования. Классы функций, для которых интеграл существует.
3. Решить задачу Коши

$$x^{(4)} + \ddot{x} = t \cdot \cos 2t, \quad x(0) = \dot{x}(0) = \ddot{x}(0) = x^{(3)}(0) = 0.$$

4. Дан треугольник  $ABC, A(1; 1), B(-1; 4), C(4; 7)$ . Написать уравнение высоты из вершины  $B$
5. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

6. Найти объем тела, ограниченного поверхностями  $y = x^2, y = 1, z = x^2 + y^2, z = 0$ .
7. Найти интреполяционный многочлен Лагранжа по следующим данным:  $f(-1) = 6, f(0) = 4, f(1) = 2, f(2) = 6$ .

**Вариант 5.**

1. Скалярное, векторное и смешанное произведение векторов.
  2. Основная лемма вариационного исчисления.
  3. Решить уравнение  $\ddot{x} - 4x = t^2$ ,  $x(0) = 1$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ .
  4. Решить систему линейных уравнений с помощью обратной матрицы: 
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -3, \\ -2x_1 + 6x_2 + 9x_3 = -11, \\ -4x_1 - 3x_2 + 8x_3 = -2. \end{cases}$$
  5. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах:  $\vec{a}(-1; 2; 3)$ ,  $\vec{b}(2; -1; 4)$ .
  6. Найти интеграл  $\int x \operatorname{arctg} x dx$ .
  7. Найти интерполяционный многочлен Лагранжа по следующим данным:  $f(-1) = -11$ ,  $f(1) = -3$ ,  $f(2) = 1$ ,  $f(3) = 13$ .
- 

**Вариант 6.**

1. Понятие обратной матрицы, ее существование и единственность, методы вычисления и построения. Ранг матрицы, его свойства и методы вычисления. Базисный минор и его свойства.
2. Разложение функций вещественной переменной в степенной ряд. Ряд Тейлора. Условия сходимости ряда Тейлора к порождающей функции.
3. Решить уравнение  $y^{(5)} - 8y'' = x^2 - 2x$ .
4. Нарисовать на комплексной плоскости геометрическое место точек  $z$ , которые удовлетворяют условию  $|z - 2i + 3| = 1$ .
5. Найти объем пирамиды, построенной на векторах:  $\vec{a}(3; -1; 2)$ ,  $\vec{b}(2; 1; 0)$ ,  $\vec{c}(1; 0; 4)$ .
6. Исследовать функцию  $u(x, y) = 3x^2 + 3y^2 - x^3 + 4y$  на экстремум.
7. Найти математическое ожидание и дисперсию произведения независимых случайных величин  $X_1$  и  $X_2$ , если  $P(X_1 = 1) = 0.5$ ,  $P(X_1 = 2) = 0.5$ ,  $P(X_2 = 0.5) = 0.4$ ,  $P(X_2 = 1) = 0.6$ .

**Вариант 1.**

1. Теорема существования и единственности решения задачи Коши

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \quad x \in R^n.$$

2. Основные понятия теории числовых рядов. Абсолютная и условная сходимость рядов. Признаки сходимости числовых рядов.

3. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$$

4. Найти косинус угла между векторами  $\overrightarrow{BA}$  и  $\overrightarrow{BC}$ , если  $A(5; 2; 1)$ ,  $B(2; 4; 2)$ ,  $C(1; 0; 7)$ .  
5. Исследовать функцию  $u(x, y) = x^2 + y^2 - xy - 2x + y - 1$  на экстремум.  
6. Сформулировать в логических символах утверждение (на языке  $\varepsilon - \delta$ ): функция  $f(x)$  не является бесконечно большой при  $x \rightarrow +\infty$ .  
7. При каких  $a, b$  каждое решение уравнения  $\ddot{x} + ax + bx = 0$  обращается в нуль в бесконечном числе точек  $t$

**Вариант 2.**

1. Скалярное, векторное и смешанное произведение векторов.  
2. Аппроксимация функций алгебраическими многочленами. Задача интерполирования. Метод наименьших квадратов.  
3. Найти  $z^{20}$ , если  $z = 2 - 2\sqrt{3}i$   
4. Даны координаты вершин пирамиды  $A_1, A_2, A_3, A_4$ . Найти длину ребра  $A_1A_2$  и угол между ребром  $A_1A_4$  и гранью  $A_1A_2A_3$ , если  $A_1(3; 5; 4)$ ,  $A_2(8; 7; 4)$ ,  $A_3(5; 10; 4)$ ,  $A_4(4; 7; 8)$ .  
5. Выяснить, существует ли ситуация равновесия по Нэшу в антагонистической игре

$$([0, 2], [-2, 2], H_1(x, y) = xy^2).$$

6. Исследовать сходимость числового ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{(n+1)!}$ .  
7. Составить линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, частным решением которого является функция  $e^t t \sin 2t \cos 6t$ .

**Вариант 3.**

1. Поле комплексных чисел. Его конструкция. Алгебраическая и тригонометрическая форма записи комплексных чисел. Формула Муавра и формула извлечения корней  $n$ -ой степени из комплексного числа.
2. Интеграл Римана. Определение и свойства. Критерий существования. Классы функций, для которых интеграл существует.
3. При каких  $\lambda$  существует  $A^{-1}$ , если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & \lambda & -1 \end{pmatrix}.$$

4. Кривая  $y = \varphi(x)$  проходит через точку  $(0, 1)$  и обладает тем свойством, что в каждой ее точке тангенс угла касательной к этой кривой равен удвоенному произведению координат точки касания. Найти уравнение кривой.

5. Лежит ли вектор  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  в плоскости, образованной векторами

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}?$$

6. Сформулировать в логических символах утверждение (на языке  $\varepsilon - \delta$ ): функция  $f(x)$  не является бесконечно малой при  $x \rightarrow -\infty$ .

7. При каких значениях параметров  $a, b$  нулевое решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = ay - \cos x + 1 \\ \dot{y} = bx - \sin y \end{cases}$$

асимптотически устойчиво

-----

**Вариант 4.**

1. Понятие обратной матрицы, ее существование и единственность, методы вычисления и построения. Ранг матрицы, его свойства и методы вычисления. Базисный минор и его свойства.
2. Экстремум функции двух переменных. Необходимое условие экстремума. Достаточное условие экстремума.
3. Исследовать на устойчивость положение равновесия  $(1, 1)$  системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x + y + 2x^3 \\ \dot{y} = -x - 2y + 3x^5 \end{cases}$$

4. Найти  $z^{20}$ , если  $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

5. Даны координаты вершин пирамиды  $A_1, A_2, A_3, A_4$ . Найти длину ребра  $A_1A_2$  и угол между ребром  $A_1A_4$  и гранью  $A_1A_2A_3$ , если  $A_1(4; 6; 5), A_2(6; 9; 4), A_3(2; 10; 10), A_4(7; 5; 9)$ .

6. Вычислить  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{\sin^2 x}$ .

7. Составить линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, частным решением которого является функция  $e^{t} \sin^2 t$ .

**Вариант 5.**

1. Различные виды уравнений плоскости. Расстояние от точки до плоскости. Взаимное расположение плоскостей.

2. Производная функции одной переменной, ее геометрический и механический смысл. Производное отображение функции, действующее из  $\mathbf{R}^n$  в  $\mathbf{R}^m$ .

3. Написать задачу, двойственную к задаче линейного программирования

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 - 2x_4 \rightarrow \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 2 \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 - x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 \geq -1 \\ x_1 \leq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

4. Найти матрицу  $A^{-1}$ , обратную данной

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

5. Даны координаты вершин пирамиды  $A_1, A_2, A_3, A_4$ . Найти длину ребра  $A_1A_2$  и угол между ребром  $A_1A_4$  и гранью  $A_1A_2A_3$ , если  $A_1(4; 2; 5), A_2(0; 7; 2), A_3(0; 2; 7), A_4(1; 5; 0)$ .

6. Найти интеграл  $\int \frac{3x-1}{x^2+x+1} dx$ .

7. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = \ln(4y + e^{-4x}) \\ \dot{y} = 3y - 1 - \sqrt[3]{1-6x} \end{cases}$$

-----

**Вариант 6.**

1. С-ядро кооперативной игры. Теорема о принадлежности дележа С-ядру.

2. Различные определения непрерывности функции в точке и на множестве. Непрерывность сложной функции.

3. Составить линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, частным решением которого является функция  $te^t \sin 2t$ .

4. Найти матрицу  $A^{-1}$ , обратную данной

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \\ 5 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

5. Найти  $z^{20}$ , если  $z = -2 + 2\sqrt{3}i$

6. Найти интреполяционный многочлен Лагранжа по следующим данным:  $f(-3) = -5, f(-1) = -11, f(2) = 10$ .

7. В шар радиуса  $R$  вписать цилиндр наибольшего объема.

**Вариант 7.**

1. Необходимые и достаточные условия существования ситуации равновесия по Нэшу в чистых стратегиях для антагонистических игр.
2. Два определения предела функции в точке и их эквивалентность. Предел функции при  $x \rightarrow \infty$ . Односторонние пределы.
3. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах:  $\vec{a}(-1; 2; 3)$ ,  $\vec{b}(2; -1; 4)$ .
4. Исследуйте на непрерывность и постройте график функции  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x^n + x^{2n}}$ ,  $x \geq 0$ .
5. Зная, что  $f(x)$  — многочлен четвертой степени, и  $f(2) = -1$ ,  $f'(2) = 0$ ,  $f''(2) = -12$ ,  $f'''(2) = 12$ ,  $f^{(4)}(2) = 24$ , вычислите  $f(1)$ .
6. Найти интеграл  $\int \frac{x^3 - 2x^2}{x + 3} dx$ .
7. При каких  $a$  нулевое решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - y - \sin x + \ln(1 - 2y) \\ \dot{y} = \sqrt{1 + 2x - 4y} - 1 \end{cases}$$

асимптотически устойчиво.

**Вариант 8.**

1. Крайние точки выпуклого множества. Характеристика крайних точек множества  $\Omega = \{x \in R^n : Ax = b, x \geq 0\}$ .
2. Матрицы. Их виды и операции над матрицами. Понятие перестановки и четности перестановки. Определитель матрицы и его свойства.
3. Найти объем пирамиды, построенной на векторах:  $\vec{a}(2; -3; 0)$ ,  $\vec{b}(1; 4; 2)$ ,  $\vec{c}(-2; 1; -1)$ .
4. Найти  $z^{20}$ , если  $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ .
5. Найти объем тела, ограниченного поверхностями  $y = x^2$ ,  $y = 1$ ,  $z = x^2 + y^2$ ,  $z = 0$ .
6. Вычислить  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}$ .
7. Решить задачу Коши  $(x - 2t + 1)x' = 4t - 2x - 3$ ,  $x(0) = 0$ .

**Вариант 9.**

1. Линейные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.
2. Векторные подпространства векторного пространства: их сумма и пересечение. Свойства. Прямая сумма векторных подпространств, критерии и свойства прямой суммы.
3. Найти площадь треугольника, построенного на векторах:  $\vec{a}(3; -2; 1)$ ,  $\vec{b}(2; -4; 1)$ .
4. Вычислить

$$\left(\frac{-6 + 2i}{1 + 3i}\right)^3$$

5. Найти область сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{(2x-1)^n}{4^n}$ .

6. Найти интеграл  $\int x \operatorname{arctg} x dx$ .

7. Решить задачу Коши  $\ddot{x} - \dot{x} = f(t)$ ,  $x(0) = 1$ ,  $\dot{x}(0) = -1$ ,  $f(t) = \begin{cases} t, & t \leq 1 \\ t^2, & t \geq 1 \end{cases}$

-----

**Вариант 10.**

1. Устойчивость по Ляпунову. Теорема об устойчивости по первому приближению.
2. Численные методы решения нелинейных уравнений (метод половинного деления, метод Ньютона, метод простых итераций).
3. Проверить, является ли точка  $(1; 2; 0)$  решением задачи линейного программирования

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &\rightarrow \min \\ \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

4. При каких  $\lambda$  существует  $A^{-1}$ , если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ \lambda - 2 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

5. Найти объем пирамиды, построенной на векторах:  $\vec{a}(3; -1; 2)$ ,  $\vec{b}(2; 1; 0)$ ,  $\vec{c}(1; 0; 4)$ .
6. Найти математическое ожидание и дисперсию суммы независимых случайных величин  $X_1$  и  $X_2$ , если  $P(X_1 = 1) = 0.6$ ,  $P(X_1 = 2) = 0.4$ ,  $P(X_2 = 0) = 0.2$ ,  $P(X_2 = 1) = 0.4$ ,  $P(X_2 = 2) = 0.4$ .
7. Найти интеграл  $\int \frac{x^4 + 2x^2}{x^2 - 1} dx$ .