

## Вопросы

1. Предел числовой последовательности. Основные свойства предела. Предел последовательности в метрическом пространстве. Сходимость в пространстве  $\mathbb{R}^n$ .
2. Открытые и замкнутые множества в  $\mathbb{R}^n$ . Открытые и замкнутые множества в метрическом пространстве.
3. Устойчивость по Ляпунову. Теоремы об устойчивости по первому приближению.
4. Точечные и интервальные оценки параметров распределения. Свойства оценок. Методы получения оценок. Примеры доверительных интервалов.
5. Компактные множества. Компакты в  $\mathbb{R}^n$ . Критерий компактности в пространстве  $C[a, b]$ .
6. Два определения предела функции в точке и их эквивалентность. Предел функции при  $x \rightarrow \infty$ . Односторонние пределы.
7. Различные определения непрерывности функции в точке и на множестве. Непрерывность сложной функции.
8. Теоремы Вейерштрасса о непрерывных функциях.
9. Производная функции одной переменной. Производное отображение функции  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ .
10. Теорема о промежуточном значении непрерывной функции. Применение к решению уравнений.
11. Экстремум функции двух переменных. Необходимое условие экстремума. Достаточное условие экстремума.
12. Корни  $n$ -ой степени из комплексного числа  $z$  и из 1. Группа корней  $n$ -ой степени из 1. Первообразные корни  $n$ -ой степени из 1. Круговые многочлены порядка  $n$ , их определение и построение в частных случаях.
13. Матрица линейного оператора. Связь множества квадратных матриц и множества линейных операторов. Изменение матрицы линейного оператора при изменении базиса.
14. Линейные операторы в нормированных пространствах. Ограниченность и непрерывность линейного оператора. Норма линейного оператора. Теорема о норме.
15. Линейные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.
16. Интеграл Римана. Определение и свойства. Критерий существования. Классы функций, интегрируемых по Риману.
17. Основные понятия теории рядов. Абсолютная и условная сходимость рядов. Признаки сходимости числового ряда.
18. Равномерная сходимость функционального ряда и функциональной последовательности. Пространство  $C[a, b]$  и его полнота.
19. Степенные ряды в вещественной области. Структура области сходимости. Теорема Абеля.
20. Неприводимость многочленов над полем. Разложение многочленов на неприводимые над полями вещественных и комплексных чисел. Основная теорема алгебры (без доказательства) и следствия из нее. Теоремы о степенях многочленов, неприводимых над  $\mathbb{R}$  и  $\mathbb{C}$ .
21. Поле комплексных чисел. Его конструкция. Алгебраическая и тригонометрическая форма записи комплексных чисел. Формула Муавра и формула извлечения корня  $n$ -ой степени из комплексного числа.
22. Прямая в пространстве. Взаимное расположение двух прямых. Взаимное расположение прямой и плоскости.
23. Скалярное, векторное и смешанное произведение векторов.
24. Системы  $n$  линейных уравнений с  $m$  неизвестными. Метод Гаусса. Теорема Кронекера-Капелли о разрешимости системы линейных уравнений.
25. Системы  $n$  уравнений с  $n$  неизвестными и ее разрешимость. Матрица и определитель системы линейных уравнений. Метод Крамера. Однородные системы линейных уравнений. Пространство решений однородной системы, его размерность и фундаментальная система решений.

26. Система образующих и базис векторного пространства. Размерность векторного пространства. Теорема о независимости размерности конечномерного пространства от выбора базиса.

27. Кольцо многочленов от одной переменной  $K[x]$ , где  $K$  — поле. Делимость в кольце многочленов. НОД двух многочленов и его нахождение с помощью алгоритма Эвклида. Представление НОД двух многочленов из  $K[x]$  в виде их линейной комбинации.

28. Числовые характеристики случайной величины, их свойства. Числовые характеристики системы случайных величин.

29. Характеристический многочлен и характеристическое уравнение линейного оператора. Собственные числа и собственные векторы линейного оператора, их свойства. Приведение матрицы линейного оператора к диагональному виду. Достаточное условие приводимости матрицы линейного оператора к диагональному виду.

30. Векторные подпространства векторного пространства: их сумма и пересечение. Свойства. Прямая сумма векторных подпространств, критерии и свойства прямой суммы.

31. Евклидовы векторные пространства. Норма вектора и ее свойства. Ортонормированный базис и его свойства.

32. Понятие корня многочлена и его кратности. Критерий кратности корня. Теорема о числе корней многочленов из  $K[x]$ . Теорема о совпадении многочленов из  $K[x]$ , где  $K$  — область целостности.

33. Разложение функции вещественной переменной в степенной ряд. Ряд Тейлора. Условие сходимости ряда Тейлора к порождающей функции.

34. Интеграл функции комплексного переменного. Теорема Коши. Формула Коши.

35. Криволинейные интегралы второго рода. Формула Грина. Независимость криволинейного интеграла от пути интегрирования.

36. Канонические уравнения эллипса, гиперболы и параболы.

37. Интеграл Лебега. Определение и основные свойства. Сравнение с интегралом Римана.

38. Производная функции комплексного переменного. Условия Коши–Римана. Аналитические функции.

39. Матрицы. Их виды и операции над матрицами. Перестановки; четность перестановки. Определитель квадратной матрицы, его свойства.

40. Обратная матрица, ее существование и единственность; методы построения обратной матрицы.

41. Принцип сжимающих отображений. Теорема Банаха. Примеры применения.

42. Теорема существования и единственности решения задачи Коши  $x' = f(t, x)$ ,  $x(t_0) = x_0$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ .

43. Гильбертово пространство. Ряд Фурье по ортогональной системе. Экстремальное свойство отрезка ряда Фурье. Теорема о сходимости ряда Фурье. Ряд Фурье по тригонометрической системе.

44. Устойчивость по Ляпунову. Теоремы об устойчивости по первому приближению.

45. Случайная величина. Функция распределения. Плотность распределения вероятностей. Вероятность попадания в интервал при одном испытании.

46. Понятие линейного отображения и линейного оператора, действующего на векторном пространстве. Ядро и образ линейного оператора и их свойства. Теорема о размерности ядра и образа линейного оператора.

47. Векторное пространство и его свойства. Линейная комбинация и линейная оболочка векторов. Линейная зависимость и независимость системы векторов.

48. Различные виды уравнений плоскости. Расстояние от точки до плоскости. Взаимное расположение плоскостей.

## Задачи

1. Плотность распределения системы  $(\xi, \eta)$  задана равенствами:

$$p(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 1 \text{ или } y < 3, \\ \frac{C}{x^4(y-1)^3}, & \text{если } x > 1 \text{ и } y > 3; \end{cases}$$

найдите параметр  $C$ ; найдите плотности составляющих; зависимы ли  $\xi$  и  $\eta$ ?

2. Проверьте, является ли точка  $(0; 1; 2)$  решением задачи линейного программирования

$$x_1 + x_2 - 2x_3 \rightarrow \min$$
$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

3. Образует ли полугруппу множество целых чисел  $(Z, *)$  с операцией  $a * b \doteq a - b$ ?

4. Для уменьшения общего количества игр 16 волейбольных команд случайным образом разбиты на 2 равночисленные подгруппы. Имеются 4 команды значительно более высокого класса, чем остальные. Какова вероятность того, что в обеих подгруппах будет одинаковое число команд высокого класса.

5. Исследуйте ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4 + x^4}}$  на равномерную сходимость на промежутке  $(-\infty, +\infty)$ .

6. Нарисуйте на комплексной плоскости множества точек  $z = x + iy$ : а)  $|z - i| < 2$ ;

б)  $\arg(z(i + 1)) = \frac{\pi}{4}$ .

7. Преобразуйте уравнение  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y}$ , выбрав новые независимые переменные

$\xi = x + y, \eta = x - y$ .

8. При каких  $a, b$  каждое решение уравнения  $\ddot{x} + ax + bx = 0$  обращается в нуль в бесконечном числе точек  $t$ ?

9. Постройте кривые: а)  $y = -\frac{3}{2}\sqrt{x^2 - 4}$ ; б)  $x = \frac{2}{3}\sqrt{y^2 + 9}$ .

10. Две одинаковые монеты радиуса  $r$  расположены внутри круга радиуса  $R > 2r$ , в который наугад бросается точка. Найдите вероятность того, что эта точка не упадет ни на одну из монет, если монеты не перекрываются.

11. Составьте линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами минимального порядка, частным решением которого является функция  $\sin t \cos 3t$ .

12. Вычислите определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 7 & 5 & -1 & 2 \\ 8 & 8 & 11 & -1 \\ 3 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix},$$

разложив его по элементам третьего столбца

13. Изобразите область, заданную неравенствами  $0 < \operatorname{Re}(2iz) < 1$ , и установите, является ли она односвязной.

14. Напишите задачу, двойственную к задаче линейного программирования

$$-3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 \rightarrow \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 1 \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 - x_3 + 5x_4 \geq -1 \\ x_1 \leq 0, x_3 \geq 0, x_4 \leq 0 \end{cases}$$

15. Найдите все первообразные корни и сумму всех первообразных корней степени 14 из 1.

16. Вычислите интеграл  $\oint_{|z|=4} \frac{\cos z}{z^2 - \pi^2} dz$  (обход контура против часовой стрелки).

17. Найдите фундаментальную матрицу системы  $\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = 2x. \end{cases}$

18. Выделите главную часть бесконечно большой функции  $\ln(5 + e^x)$  (в виде степенной функции) при  $x \rightarrow +\infty$ .

19. Найдите решение уравнения  $x^2 y' = y(x + y)$ .

20. Приводится ли матрица линейного оператора  $f$ , которая в некотором базисе имеет вид  $\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ , к диагональному виду?

21. Найдите площадь части сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , расположенной между плоскостями  $x = \frac{\sqrt{3}}{3}y$  и  $x = y$  ( $x \geq 0, y \geq 0$ ).

22. Исследуйте на устойчивость положение равновесия  $(1, 1)$  системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x + y + 2x^3, \\ \dot{y} = -x - 2y + 3x^5. \end{cases}$$

23. Найдите общее число инверсий в перестановке а)  $(6, 2, 7, 1, 4, 5, 3)$ ; б)  $\{1, 4, 7, \dots, 3n - 2, 2, 5, \dots, 3n - 1, 3, 6, \dots, 3n\}$ .

24. Решить задачу Коши

$$x^{(4)} + \ddot{x} = t \cdot \cos t, \quad x(0) = \dot{x}(0) = \ddot{x}(0) = x^{(3)}(0) = 0.$$

25. Найдите ранг матрицы  $\begin{pmatrix} -5 & 3 & -4 & 0 & 3 & -4 \\ 4 & 0 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -3 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

26. Найдите объем части шара  $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ , расположенной между плоскостями  $x = \frac{\sqrt{3}}{3}y$  и  $x = y$  ( $x \geq 0, y \geq 0$ ).

27. Решите простейшую задачу вариационного исчисления

$$\int_0^1 (4\dot{x}^2(t) - x^2(t)) dt \rightarrow \text{extr}, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 0$$

28. Числа 20604, 53227, 25755, 20927 и 289 делятся на 17. Докажите, что определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 7 & 5 & 5 \\ 2 & 0 & 9 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & 9 \end{vmatrix} \text{ тоже делится на } 17.$$

29. Найдите массу пластинки  $x^2 + y^2 \leq 16$ ,  $y \geq 0$ , если плотность пропорциональна квадрату ординаты и в точке  $(0, 4)$  равна 32.

30. При каких  $a$  нулевое решение системы  $\begin{cases} \dot{x} = ax - y + \sin x + \ln(1 - 2y) \\ \dot{y} = \sqrt{1 + 2x - 4y} - 1 \end{cases}$  является асимптотически устойчивым?

31. С помощью  $\varepsilon - \delta$  рассуждений докажите равномерную непрерывность функции  $ax + b$  на всей числовой оси.

32. Вычислите интеграл  $\oint_{x^2 + y^2 = 4} xy^2 dy - yx^2 dx$  с помощью формулы Грина.

33. Найдите экстремум функции  $2x + y - 2z$  при условии  $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ .

34. Проверьте, является ли точка  $(1; 2; 0)$  решением задачи линейного программирования

$$\begin{aligned} & x_1 - x_2 + x_3 \rightarrow \min \\ & \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

35. Придумайте систему линейных уравнений, для которой система векторов образует  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  фундаментальную систему решений.

36. Найдите особые точки уравнения  $y' = \frac{2y - x}{3x + 6}$  и исследуйте их характер.

37. Найдите размерность суммы двух линейных оболочек  $H_1$  и  $H_2$ :

$$H_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad H_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

38. Преобразуйте уравнение  $x^4 \frac{d^2 y}{dx^2} + 2x^3 \frac{dy}{dx} - y = 0$ , введя новую независимую переменную  $t = \frac{1}{x}$ .

39. При каких  $a, b$  все решения уравнения  $y'' + ay' + by = 0$  ограничены на всей прямой?

40. Найдите какой-нибудь базис и определите размерность арифметического  $n$ -мерного векторного подпространства  $R^5$ , состоящего из векторов  $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$  из  $R^5$ , удовлетворяющих данному условию  $x_1 + x_5 = 0$ .

41. Пусть

$$D(A) = \{x \in C[0, 1] : x' \in C[0, 1], x(0) = 0, \} \quad Ax \doteq x';$$

докажите, что оператор  $A$  непрерывно обратим и найдите  $A^{-1}$ .

42. Напишите задачу, двойственную к задаче линейного программирования

$$\begin{aligned} & 3x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 \rightarrow \min \\ & \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 2 \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 - x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 \geq -1 \\ x_1 \leq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

43. Является ли множество всех арифметических  $n$ -мерных векторов  $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$  из  $R^n$ , удовлетворяющих условию  $x_1 = x_n = 0$ , векторным пространством над полем  $R$ ?

44. Является ли функция  $\cos t$  решением экстремальной задачи

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\dot{x}^2 - x^2) dt \rightarrow \text{extr}, \quad x(0) = 1, \quad x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

45. Является ли множество всех арифметических  $n$ -мерных векторов  $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$  из  $R^n$ , удовлетворяющих условию  $x_1^2 - x_n^2 = 0$ , векторным пространством над полем  $R$ ?

46. Функции  $g$  и  $h$  дважды непрерывно дифференцируемы на  $[0, 1]$ , причем  $g''(x) \equiv h''(x)$  на  $[0, 1]$ . Найдите функцию  $f(x) \doteq g(x) - h(x)$ , если  $f(0) = 1, f(1) = 0$ .

47. Найдите решение уравнения  $\ddot{x} + 2x = 2 \operatorname{tg} t$ .

48. Пусть  $A$  — оператор дифференцирования на множестве многочленов, степень которых не превосходит 4. Обратим ли этот оператор?

49. Убедитесь, что функция  $u = x^2 - y^2 - 5x + y + 2$  является действительной частью некоторой аналитической функции  $f(z)$  и найдите эту функцию, если  $f(0) = 2$ .

50. При каких  $a, b$  уравнение  $\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0$  имеет хотя бы одно решение, стремящееся к  $\infty$  при  $t \rightarrow -\infty$ ?

51. Найдите размерность векторного пространства многочленов, с коэффициентами из поля  $R$ , степень которых не превосходит 3, и которые делятся на многочлен  $f(x) = x - 1$ .

52. Отрезок длины  $a > 0$  разделите на две части так, чтобы сумма площадей квадратов, построенных на этих частях, была наименьшей.

53. Найдите решение уравнения  $y'' = yy'$ .

54. Является ли множество всех чисел вида  $a + b\sqrt{7}$ , где  $a$  и  $b$  — рациональные числа векторным пространством над полем  $Q$ ?

55. Найдите собственные числа и собственные векторы матрицы  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ .

56. Закон движения материальной точки по прямой имеет вид  $\frac{1}{4}t^4 - 4t^3 + 16t^2$ .

а) В какие моменты времени точка находится в начале координат?

б) В какие моменты времени направление ее движения совпадает с положительным направлением оси  $Ox$ ?

в) В какие моменты времени ее ускорение равно нулю?

57. Найдите вычет функции  $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}$  в бесконечно удаленной точке.

58. Придумайте линейный оператор  $A$  на  $V_K = R^3$ , не являющийся единичным, для которого векторы  $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  и  $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , являются собственными.

59. Укажите порядок малости относительно  $x - 1$  функции  $1 - x^2 + 2\sqrt{1 - x^2}$  при  $x \rightarrow 1 - 0$ .

60. Пусть  $S$  — внешняя сторона полной поверхности сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ . Вычислите интеграл

$$\iint_S x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy$$

с помощью формулы Остроградского–Гаусса.

61. Придумайте линейный оператор  $f$ , для которого вектор  $a = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ , является образующей для  $\text{Ker } f$ , рассматриваемого как векторное пространство над  $R$ .

62. Найдите предел  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x^\alpha)}{\sin(\pi x^\beta)}$ .

63. Найдите решение задачи Коши

$$\ddot{x} - \dot{x} = f(t), \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = -1, \quad f(t) = \begin{cases} t, & t \leq 1 \\ t^2, & t \geq 1 \end{cases}$$

64. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку  $(1, -1, 0)$  перпендикулярно прямой  $\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x - y - z = 1. \end{cases}$