Вопросы к госэкзамену для бакалавриата
«Математика и компьютерные науки»

По кафедре алгебры

1. Поле комплексных чисел. Его конструкция. Алгебраическая и тригонометрическая форма записи комплексных чисел. Формула Муавра и формула извлечения корней n-ой степени из комплексного числа.
2. Корни n-ой степени из комплексного числа z из 1. Группа корней n-ой степени из 1. Первообразные корни n-ой степени из 1. Круговые многочлены порядка n, их определение и построение в частных случаях.
3. Неприводимость многочленов над полем. Разложение многочленов на неприводимые над полем вещественных и комплексных чисел. Основная теорема алгебры (без доказательства) и следствия из нее. Теоремы о степенях многочленов, неприводимых над R и C.
4. Векторное пространство и его свойства. Линейная комбинация и линейная оболочка векторов. Линейная зависимость и независимость системы векторов. Свойства линейной зависимости.
5. Векторные подпространства векторного пространства: их сумма и пересечение. Свойства. Прямая сумма векторных подпространств, критерии и свойства прямой суммы.
6. Матрицы. Их виды и операции над матрицами. Понятие перестановки и четности перестановки. Определитель матрицы и его свойства.
7. Понятие обратной матрицы, ее существование и единственность, методы вычисления и построения. Ранг матрицы, его свойства и методы вычисления. Базисный минор и его свойства.
8. Системы n уравнений с n неизвестными и ее разрешимость. Матрица и определитель системы уравнений. Метод Крамера. Однородные системы линейных уравнений. Пространства решений однородной системы линейных уравнений, его размерность и фундаментальная система решений.
9. Система n уравнений с m неизвестными. Метод Гаусса. Теорема Кронекера-Капелли о разрешимости системы уравнений.
10. Понятие линейных отображений и линейных операторов, действующих на векторном пространстве. Ядро и образ линейного оператора и их свойства. Теорема о размерности ядра и образа линейного оператора.
11. Характеристический многочлен и характеристическое уравнение линейного оператора. Собственные числа и собственные векторы, соответствующие данному собственному значению линейного оператора и их свойства. Приведение матрицы линейного оператора к диагональному виду. Критерий достаточности приводимости матрицы линейного оператора к диагональному виду.
12. Евклидовы векторные пространства. Норма вектора и ее свойства. Ортонормированный базис и его свойства.
13. Скалярное, векторное и смешанное произведение векторов.
14. Прямая в пространстве. Взаимное расположение двух прямых. Взаимное расположение прямой и плоскости.
15. Различные виды уравнений плоскости. Расстояние от точки до плоскости. Взаимное расположение плоскостей.

16. Матрица линейного оператора. Связь множества квадратных матриц и множества линейных операторов. Изменение матрицы линейного оператора при изменении базиса.

17. Система образующих и базис векторного пространства. Размерность векторного пространства. Теорема о независимости размерности конечномерного пространства от выбора базиса.

18. Кольцо многочленов от одной переменной K[x], где K – поле. Делимость в кольце многочленов. НОД двух многочленов и его нахождение с помощью алгоритма Евклида. Представление НОД двух многочленов из K[x] в виде их линейной комбинации.

19. Понятие корня многочлена и его кратности. Критерий кратности корня. Теорема о числе корней многочленов из K[x]. Теорема о совпадении многочленов из K[x], где K – область целостности.

20. Канонические уравнения эллипса, гиперболы и параболы.

По кафедре математического анализа

1. Предел числовой последовательности, его основные свойства. Предел последовательности в метрическом пространстве. Полнота метрического пространства. Сходимость в пространстве $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$.
2. Открытые и замкнутые множества в $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$. Открытые и замкнутые множества в метрическом пространстве.
3. Компактные множества. Компакты в пространстве $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$.
4. Два определения предела функции в точке и их эквивалентность. Предел функции при $x \to \infty$. Односторонние пределы.
5. Различные определения непрерывности функции в точке и на множестве. Непрерывность сложной функции.
6. Теоремы Вейерштрасса о непрерывных функциях.
7. Теорема о промежуточном значении непрерывной функции. Применение к решению уравнений.
8. Производная функции одной переменной, ее геометрический и механический смысл. Производное отображение функции, действующее из $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$ в $\mathbf{R}^{m}$.
9. Экстремум функции двух переменных. Необходимое условие экстремума. Достаточное условие экстремума.
10. Интеграл Римана. Определение и свойства. Критерий существования. Классы функций, для которых интеграл существует.
11. Основные понятия теории числовых рядов. Абсолютная и условная сходимость рядов. Признаки сходимости числовых рядов.
12. Равномерная сходимость функционального ряда и функциональной последовательности. Пространство $C_{[a,b]}$, его полнота.
13. Степенные ряды в вещественной области. Структура области сходимости. Теорема Абеля.
14. Разложение функций вещественной переменной в степенной ряд. Ряд Тейлора. Условия сходимости ряда Тейлора к порождающей функции.
15. Криволинейные интегралы I и II рода. Формула Грина. Условие независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования.

16. Принцип сжимающих отображений. (Теорема о неподвижной точке.) Примеры применения.
17. Линейные операторы в нормированных пространствах. Норма линейного оператора.
18. Гильбертово пространство. Ряд Фурье по ортогональной системе. Экстремальное свойство отрезка ряда Фурье. Неравенство Бесселя. Теорема о сходимости ряда Фурье. Ряды Фурье по тригонометрическим системам.
19. Интеграл Лебега. Определение и основные свойства. Сравнение с интегралом Римана.
20. Случайная величина. Распределение. Функция распределения случайной величины. Плотность распределения вероятностей. Вероятность попадания в интервал при одном испытании.
21. Числовые характеристики случайной величины, их свойства. Числовые характеристики системы случайных величин.
22. Точечные и интервальные оценки параметров распределения. Свойства оценок. Методы получения оценок. Примеры доверительных интервалов.
23. Интеграл функции комплексного переменного. Теорема Коши. Формула Коши.
24. Производная функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана. Аналитические функции.
25. Численные методы решения нелинейных уравнений (метод половинного деления, метод Ньютона и метод простых итераций и др.).
26. Аппроксимация функций алгебраическими многочленами. Задача интерполирования. Метод наименьших квадратов.

По кафедре дифференциальных уравнений

1. Линейные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.
2. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.
3. Устойчивость по Ляпунову. Теоремы Ляпунова об устойчивости.
4. Крайние точки выпуклого множества. Характеристика крайних точек множества $D=\{x € \mathbf{R}^n : Ax=b,\ x \geq 0\}$.
5. Необходимое условие Эйлера слабого локального минимума в простейшей задаче вариационного исчисления.