

Вопросы
государственного экзамена по математике
для магистров математического факультета

ЧАСТЬ I

Вопросы по кафедре дифференциальных уравнений

1. Сформулировать определения устойчивости, неустойчивости и асимптотической устойчивости решения дифференциальной системы.
2. Сформулировать теоремы Ляпунова об устойчивости, неустойчивости и асимптотической устойчивости решения автономной дифференциальной системы.
3. Сформулировать теорему существования и единственности решения задачи Коши.
4. Единственно ли решение задачи Коши $\dot{x} = 2tx + x$, $x(0) = 1$?
5. Записать общее решение уравнения $y^{IV} - y = 0$.
6. Записать общее решение системы $\dot{x} = 2x + y$, $\dot{y} = 3x + 4y$.
7. Исследовать на линейную независимость на \mathbb{R} систему функций $x_1(t) = 6t + 9$, $x_2(t) = 8t + 12$.
8. Найти общее решение уравнения $\dot{x} = 1 + x^2$.
9. Найти общее решение уравнения $\dot{x} = x \cos^2 t = 0$.

Вопросы по кафедре математического анализа

Ответы должны быть мотивированы: либо ссылкой на соответствующую теорему, либо приведением контрпримера.

1. Верно ли, что всякая неограниченная числовая последовательность является бесконечно большой?
2. Верно ли, что всякая бесконечно большая числовая последовательность является неограниченной?
3. Верно ли, что всякая ограниченная числовая последовательность имеет предел?
4. Верно ли, что всякая числовая последовательность, имеющая предел, является ограниченной?
5. Верно ли, что всякая возрастающая числовая последовательность имеет конечный предел?
6. Верно ли, что всякая сходящаяся числовая последовательность является возрастающей или убывающей?
7. Пусть $a < b < c < d$. Верно ли, что существует непрерывная на $[a, d]$ функция, область значений которой есть множество $[a, b] \cup [c, d]$?

8. Верно ли, что существует неограниченная функция $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, непрерывная на $[a, b]$?
9. Верно ли, что всякая абсолютно непрерывная функция непрерывна?
10. Верно ли, что всякая непрерывная функция почти всюду имеет конечную производную?
11. Верно ли, что абсолютно непрерывная на промежутке $I \subset \mathbb{R}$ равномерно непрерывна на I ?
12. Верно ли, что всякая непрерывная на $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ функция $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$, обладающая свойством $f(0) \cdot f(1) < 0$, обращается в нуль на $[0, 1]$?
13. Верно ли, что всякая функция $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющая на $[a, b]$ условию Липшица, непрерывна на $[a, b]$?
14. Верно ли, что всякая функция $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющая на $[a, b]$ условию Липшица, абсолютно непрерывна на $[a, b]$?
15. Верно ли, что всякая функция $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющая на $[a, b]$ условию Липшица, равномерно непрерывна на $[a, b]$?
16. Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна на \mathbb{R} . Верно ли, что если $A \subset \mathbb{R}$ — открытое множество, то и его образ $f(A)$ — открытое множество?
17. Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна на \mathbb{R} . Верно ли, что если $A \subset \mathbb{R}$ — замкнутое множество, то и его образ $f(A)$ — замкнутое множество?
18. Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна на \mathbb{R} . Верно ли, что если $A \subset \mathbb{R}$ — открытое множество, то и его прообраз $f^{-1}(A)$ — открытое множество?
19. Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна на \mathbb{R} . Верно ли, что если $A \subset \mathbb{R}$ — замкнутое ограниченное множество, то и его образ $f(A)$ — замкнутое ограниченное множество?
20. Верно ли, что производная абсолютно непрерывной функции интегрируема по Лебегу?
21. Верно ли, что всякое ограниченное замкнутое множество $A \subset \mathbb{R}^n$ компактно?
22. Верно ли, что всякое ограниченное замкнутое множество $\Phi \subset \mathbb{C}[a, b]$ компактно?
23. Верно ли, что тождественный оператор любого банахова пространства вполне непрерывен?
24. Верно ли, что всякий линейный ограниченный оператор, действующий в банаховом пространстве, вполне непрерывен?
25. Верно ли, что всякий линейный ограниченный оператор, действующий в банаховом пространстве, имеет ограниченный обратный?

26. Верно ли, что всякий линейный ограниченный оператор, действующий в банаховом пространстве, имеет ограниченный спектр?
27. Верно ли, что линейный вполне непрерывный оператор, действующий в бесконечномерном банаховом пространстве, не может иметь ограниченный обратный оператор?
28. Формулы полной вероятности.
29. Определение функции распределения случайной величины.
30. Определение математического ожидания случайной величины.
31. Формулы Байеса.
32. Определение равномерно распределенной и нормально распределенной случайных величин.
33. Центральная предельная теорема.

Вопросы по кафедре алгебры

Дайте определение понятия или укажите формулу:

1. Скалярное произведение векторов. Модуль вектора. Угол между векторами.
2. Векторное произведение векторов. Вычисление векторного произведения векторов в координатной форме.
3. Прямая на плоскости. Общее уравнение прямой. Нормальный вектор прямой.
4. Уравнение прямой на плоскости, проходящей через заданную точку и направляющий вектор. Уравнение прямой, проходящей через две точки.
5. Параллельность и перпендикулярность прямых на плоскости. Угол между прямыми.
6. Общее уравнение плоскости. Нормальный вектор плоскости.
7. Уравнение плоскости, проходящей через три точки.
8. Уравнение плоскости коллинеарной двум векторам и проходящей через заданную точку.
9. Уравнение прямой в пространстве, проходящей через заданную точку и направляющий вектор. Уравнение прямой, проходящей через две точки.
10. Каноническое уравнение эллипса, фокусы и директрисы эллипса.
11. Каноническое уравнение гиперболы, фокусы и директрисы гиперболы.

12. Каноническое уравнение параболы, фокус и директриса параболы.
13. Матрицы. Сложение и умножение матриц. Умножение матрицы на число.
14. Определитель матрицы n -го порядка. Вычисление определителя разложением по строке (столбцу).
15. Вычисление определителя матрицы 2-го и 3-го порядка.
16. Ранг матрицы. Определение ранга матрицы через миноры и линейную независимость строк (столбцов) матрицы.
17. Обратная матрица, определение и вычисление.
18. Решение систем. Случай однозначного разрешения. Метод Крамера.
19. Совместные, несовместные системы. Теорема Кронекера-Капели.
20. Линейно зависимая и линейно независимая система векторов.
21. Векторное пространство. Базис векторного пространства.
22. Линейное отображение. Матрица линейного отображения.
23. Ядро и образ линейного отображения.
24. Собственные числа и собственные векторы линейного оператора.
25. Евклидово пространство. Норма вектора. Ортогональный базис евклидова пространства.
26. Алгебраическая, тригонометрическая и показательная форма записи комплексного числа. Их взаимосвязь.
27. Операции над комплексными числами: сложение, умножение, деление, возведение в степень.
28. Корни n -ой степени из комплексного числа и их геометрическая интерпретация.
29. Первообразные корни n -ой степени из 1.
30. Группа, кольцо, поле.
31. Трехгранник Френе. Касательная, главная нормаль, бинормаль.
32. Кривизна и кручение.
33. Касательная плоскость к поверхности, нормаль поверхности.
34. Замыкание, внутренность, граница множества.
35. Компактное пространство. Критерий компактности множества из \mathbb{R}^n .