

Бакалавры, второй курс. Вариант первый.

1. Вычислите предел $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{(n+2)(n+1)} - \sqrt{(n-1)(n+3)})$.
2. Исследуйте на непрерывность и постройте график функции $f(x) \doteq \begin{cases} x^2, & \text{при } |x| \leq 1, \\ 2 - |x| & \text{при } |x| > 1 \end{cases}$
3. Запишите с помощью логических символов утверждение: функция $f(x)$ не является непрерывной справа в точке x_0 .
4. На кривой $y = \frac{x^3}{3}$ найдите точку, в которой касательная параллельна прямой $y = 6x - 5$.
5. С помощью формулы Тейлора разложите многочлен $f(x) \doteq x^6 - 3x + 1$ по степеням $x + 1$.
6. Найдите объем эллипсоида, образованного вращением эллипса $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ вокруг оси абсцисс.
7. Исследуйте на сходимость интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)(\sqrt{1-x^2})}$.
8. Найдите область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^3}{(2n-1)^2}$.
9. Пусть векторы a, b таковы, что $|a| = |b| = 1, |a+b| = \sqrt{2}$. Найти угол между векторами a, b
10. Вычислить $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2010}$.
11. Вычислить определитель матрицы 4-го порядка, у которой $a_{ij} = |i-j|$.
12. Решить уравнение $y'' = yy'$.

Бакалавры, второй курс. Вариант второй.

1. Вычислите предел $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt[3]{(1-\sin x)^2}}$, не прибегая к помощи правила Лопиталья.
2. Исследуйте на непрерывность и постройте график функции $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x^n + x^{2n}}, x \geq 0$.
3. Запишите с помощью логических символов утверждение: функция $f(x)$ не является бесконечно большой при $x \rightarrow -\infty$.
4. В шар радиуса R вписать цилиндр наибольшего объема.
5. Зная, что $f(x)$ — многочлен четвертой степени, и $f(2) = -1, f'(2) = 0, f''(2) = -12, f'''(2) = -12, f^{(4)} = 24$, вычислите $f(1)$.
6. Найдите площадь фигуры, заключенной между кривой $y = \frac{a^3}{x^2 + a^2}$ и ее асимптотой.
7. Исследуйте на сходимость числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})$.
8. Найдите область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^3}{e^n}$
9. Пусть векторы a, b таковы, что $|a| = |b| = 2, |a+b| = 3$. Найти угол между векторами a, b
10. Вычислить $\left(\frac{\sqrt{3+i}}{\sqrt{3-i}}\right)^{2010}$.
11. Вычислить определитель матрицы 4-го порядка, у которой $a_{ij} = i - j$.
12. Решить уравнение $y'' = xy'$.

Механика, второй курс. Вариант первый.

1. Вычислите предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x^2} - e^{2x^2}}{x^2}$
2. Верны ли следующие высказывания: а) $(\forall a \in \mathbb{R}) (\exists x \in \mathbb{R}) : x^2 + ax = 0$; б) $(\forall a \in \mathbb{R}) (\exists x \in \mathbb{R}) : x^2 + 2ax + a = 0$?
3. Тело движется по прямой по закону $S(t) = 3t^3 - 29t^2 + 16t + 1$, где t — время в секундах, $S(t)$ — расстояние в метрах. В какой момент времени скорость минимальна?
4. Найдите точки локальных экстремумов функции $f(x) \doteq \frac{x^2-4}{(x-1)^2}$.
5. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = \frac{1}{1+x^2}$ и $y = \frac{x^2}{2}$.
6. Исследуйте на сходимость интеграл $\int_0^{\infty} \frac{x^9 dx}{(2x^5+x^3+1)^2}$.
7. Найдите область сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1)^2 x^n$.
8. Вычислить $\sin 5^0$ с точностью до 10^{-3} .
9. Решить систему $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$
10. Вычислить $(2+2i)^8$
11. Найти вектор x длина которого равна 3, который перпендикулярен вектору $(-1, 3)$.
12. Решить уравнение $(x+1)y' = (y^2+1)$.

ПМИ, второй курс. Вариант первый.

1. Вычислите предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin^2 x - \cos x}{1 - \sin x + \cos^2 x}$
2. Запишите с помощью логических символов утверждение: последовательность x_n не имеет предела.
3. Функция $f(x) = \begin{cases} a \cos x, & \text{для } x < \frac{\pi}{2}, \\ b \sin x, & \text{для } x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$ непрерывно дифференцируема на \mathbb{R} . Чему равны параметры a и b ?
4. Найдите точки локальных экстремумов функции $f(x) \doteq \frac{x(x-3)}{x^2-2x+2}$.
5. Вычислите интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 x dx$
6. Исследуйте на сходимость интеграл $\int_{-1}^1 \frac{\ln(2 + \sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}} dx$.
7. Сколько касательных можно провести из точки $(1, -1)$ к кривой $y = x^3$?
8. Вычислить $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ с точностью 0,001.
9. Пусть $A : R^3 \rightarrow R^3, Ax = [x, c]$, где $[x, c]$ — векторное произведение векторов x, c , $c = (2; 3; 4)$. Найти матрицу линейного оператора A в стандартном базисе.
10. Решить уравнение $(z + 1)^{2010} + (z - 1)^{2010} = 0$.
11. Разложить многочлен $x^6 + 27$ на неприводимые над полем вещественных чисел многочлены.
12. При каких a, b многочлен $ax^{n+1} + bx^n + 1$ делится на $(x - 1)^2$

ПМИ, второй курс. Вариант второй.

1. Вычислите предел $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{\sqrt[3]{(1 - \cos \alpha)^4}}$, не прибегая к помощи правила Лопиталя.
2. Запишите с помощью логических символов утверждение: функция $f(x)$ не является бесконечно большой при $x \rightarrow +\infty$.
3. Функция $f(x) = \begin{cases} a \cos x + b \sin x & \text{для } x < \frac{\pi}{2}, \\ b \cos x - a \sin x, & \text{для } x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$ непрерывно дифференцируема на \mathbb{R} . Найти параметры a и b ?
4. Найдите точки локальных экстремумов функции $f(x) \doteq e^{\frac{2-x^2}{x^2-1}}$.
5. Вычислите интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^9 x dx$
6. Сходится ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n^2}{1+n^3} \right)^2$?
7. Найдите сумму ряда $1 - 3x^2 + 5x^4 - \dots + (-1)^{n-1}(2n-1)x^{2n-2} + \dots$
8. Сколько касательных можно провести из точки $(-1; -1)$ к кривой $y = -x^3$?
9. Пусть $A : R^3 \rightarrow R^3, Ax = [x, c]$, где $[x, c]$ — векторное произведение векторов x, c , $c = (1; 2; 4)$. Найти матрицу линейного оператора A в стандартном базисе.
10. Решить уравнение $z^2 - 5z + 4 + 10i = 0$ в множестве комплексных чисел.
11. Разложить многочлен $x^6 - x^3 + 1$ на неприводимые над полем вещественных чисел многочлены.
12. При каком a многочлен $x^5 - ax^2 - ax + 1$ имеет (-1) имеет корнем не ниже второй кратности.

Бакалавры, третий курс. Вариант первый.

1. Укажите порядок малости функции $2^{x^2} - \cos x$ относительно x при $x \rightarrow 0$.
2. Среди всех прямоугольников, имеющих данную площадь S , найдите прямоугольник с наименьшим периметром.
3. Исследуйте сходимость интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x dx}{x\sqrt{x}}$.
4. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(n+1)^2}$
5. Укажите значения a (или докажите их отсутствие), при которых функция $f(x, y) \doteq \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{если } x^2 + y^2 \neq 0, \\ a, & \text{если } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ в точке $(0, 0)$ является непрерывной вдоль прямой $y = 2x$;
6. В уравнении $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$ перейдите к полярным координатам.
7. Вычислите интеграл $\iint_Q (1+2x) dydz + (2x+3y) dx dz + (3x+4y) dx dy$, где Q — внешняя сторона поверхности пирамиды $x + y + z \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ (примените формулу Остроградского–Гаусса).
8. Найдите объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = 8, z^2 = x^2 + y^2$.
9. Векторы $a, b, c \in R^3$ таковы, что $|a| = |b| = |c| = 2, |a + b + c| = 4, a \perp b, a \perp c$. Найдите угол между векторами b и c .
10. Среди всех комплексных чисел, удовлетворяющих условию $z \cdot \bar{z} + 3(z + \bar{z}) = 7$ найти комплексное число с наибольшим модулем.
11. Найти собственные числа оператора дифференцирования в пространстве многочленов степени не выше 2.
12. Решить уравнение $y'' + 4y = \sin^4 x$.

Бакалавры, третий курс. Вариант второй.

1. Укажите порядок малости функции $\ln \frac{1+x}{1-x}$ относительно x при $x \rightarrow 0$.
2. Среди всех прямоугольников, имеющих данную площадь S , найдите прямоугольник с наименьшей диагональю.
3. Исследуйте сходимость интеграла $\int_0^1 \frac{1 dx}{\sqrt{(1-x)x}}$.
4. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nx}}{n+1}$.
5. Укажите значения a (или докажите их отсутствие), при которых функция $f(x, y) \doteq \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{если } x^2 + y^2 \neq 0, \\ a, & \text{если } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ в точке $(0, 0)$ является непрерывной по x .
6. В выражении $w \doteq \frac{\frac{dy}{dx} - y}{1 + x \frac{dy}{dx}}$ перейдите к полярным координатам.
7. Вычислите интеграл $\oint_{\Gamma} (xy + x + y) dx + (xy + x - y) dy$, где Γ — окружность $x^2 + y^2 = 2x$, пробегаемая против часовой стрелки.
8. Найдите объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = 4, z = \sqrt{x^2 + y^2}, z < \sqrt{x^2 + y^2}$ (используйте сферические координаты).
9. Векторы $a, b, c \in R^3$ таковы, что $|a| = |b| = |c| = 1, |a + b + c| = 2, a \perp b, a \perp c$. Найдите угол между векторами b и c .
10. Среди всех комплексных чисел, удовлетворяющих условию $z \cdot \bar{z} - 6(z + \bar{z}) = 21$ найти комплексное число с наибольшим модулем.
11. Пусть $A : R^3 \rightarrow R^3, Ax = [x, c]$, где $[x, c]$ — векторное произведение векторов $x, c, c = (3; 0; 4)$. Найдите матрицу линейного оператора A в стандартном базисе.
12. Решить уравнение $y'' + 9y = \cos^4 x$.

Механика, третий курс. Вариант первый.

1. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{\sin x - x}$
2. С помощью логической символики записать утверждение: последовательность x_n не является ограниченной.
3. Вычислить $\int \frac{x}{(x+1)(x+2)} dx$
4. Кусок проволоки данной длины l согните в виде прямоугольника так, чтобы площадь этого прямоугольника была наибольшей.
5. Пусть $z = f(u, v), u = xe^y, v = ye^x$. Найдите dz .
6. Исследуйте сходимость числового ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{2^n}$.
7. Исследуйте сходимость интеграла $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x+x^2}}$.
8. Найдите массу круглой пластинки радиуса R , если плотность ее в каждой точке пропорциональна расстоянию от точки до центра и равна δ на краю пластинки.
9. Вычислить $(4 - 4i)^{16}$.
10. Найти вектор x , перпендикулярный векторам $(1; 2; 0); (-1; 1; -2)$ и длина которого равна 5.
11. Вычислить $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$
12. Решить уравнение $y''' - 4y' = 4xe^x$.

ПМИ, третий курс. Вариант первый.

1. Укажите порядок малости функции $\sqrt{x + \sqrt{x}}$ относительно x при $x \rightarrow 0$.
2. Найти множество сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nx}}{n}$
3. Открытый бак с квадратным основанием должен вмещать v литров. При каких размерах на его изготовление уйдет наименьшее количество листовой стали?
4. Используя разложение функции $f(x) \doteq \sin x^3$ по формуле Тейлора, найдите $f^{(15)}(0)$.
5. Вычислить $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$
6. Исследуйте сходимость интеграла $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\ln(1+x)}$
7. Вычислите объем тела, ограниченного сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ и конусом $x^2 + y^2 = z^2$ (внешнего по отношению к конусу).
8. Вычислите криволинейный интеграл $\oint_C 2(x^2 + y^2) dx + (x + y)^2 dy$, где C — пробегаемый в положительном направлении контур треугольника ABC , $A(1; 1)$, $B(2; 2)$, $C(1; 3)$.
9. Разложить многочлен $x^4 + 4$ на линейные множители над полем комплексных чисел.
10. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$
11. Найти все комплексные числа, такие, что $z^2 = \bar{z}$.
12. Решить уравнение $y'' + y = x \sin^2 x$

ПМИ, третий курс. Вариант второй.

1. Укажите порядок малости функции $\operatorname{tg}^3 x - \sin^3 x$ относительно x при $x \rightarrow 0$.
2. Найти множество сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} x^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$
3. Найдите размеры цилиндра заданного объема v , имеющего наименьшую полную поверхность.
4. Используя разложение функции $f(x) \doteq e^{2x-x^2}$ по формуле Тейлора, найдите $f^{(V)}(0)$.
5. Вычислить $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{(1+\operatorname{tg}^2 x)^2}$
6. Исследуйте сходимость интеграла $\int_0^{\infty} \left(e^{-\frac{1}{x^2}} - e^{-\frac{4}{x^2}} \right) dx$.
7. Тело ограничено параболоидом $2z = x^2 + y^2$ и сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ (внутри параболоида). Найдите объем этого тела.
8. Вычислите $\oint_C f(y+z) dx + (z+x) dy + (x+y) dz$, где C — окружность $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x + y + z = 0$.
9. Разложить многочлен $x^4 + x^2 + 1$ на линейные множители над полем комплексных чисел.
10. Вычислить e^A , где $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
11. Найти все комплексные числа, такие что $z = (\bar{z})^2$.